

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

13 marzo 2025

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^2 - \bar{z}^2 + 2|z|^2 = \frac{(1+i)^{12}}{\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)^6}$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \ln \frac{\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} \left(\frac{1}{8}x^2\right)}{2^{x-1} - 2\sqrt{x}}.$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan^2(x-1) - 2 \cos(x-1) + 2}{\ln^4 x - 2(x-1)^4}.$$

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della seguente funzione

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}}.$$

5. Data la funzione

$$\int \frac{1}{5x-1} \sqrt{\frac{x-1}{x}} dx,$$

- i) calcolarne l'integrale indefinito;
- ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[-3, 0[$, in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

Soluzioni

1. Poiché

$$\frac{(1+i)^{12}}{(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})^6} = \left(\frac{(1+i)^2}{\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})} \right)^6 = \left(\frac{2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})} \right)^6$$

$$= 2^6 \left(\cos 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 64 \left(\cos \frac{9}{2} \pi + i \sin \frac{9}{2} \pi \right)$$

$$= 64 \left(\cos \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right) = 64i$$

posto $z = x + iy$ e quindi $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$
 $|z|^2 = x^2 + y^2$

l'equazione diventa

$$x^2 - y^2 + 2xyi - x^2 + y^2 + 2xyi + 2x^2 + 2y^2 = 64i \quad (\Rightarrow)$$

$$2x^2 + 2y^2 + 4xyi = 64i \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 0 \\ 4xy = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x = y = 0 \\ xy = 64 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 64 \end{cases} \quad \emptyset$$

L'equazione non ha soluzioni

2. $\frac{\log_{0.5}^2 x - \log_{0.5}(\frac{1}{8}x^2)}{2^{x-1} - 2^{\sqrt{x}}} > 0$ ID: $\begin{cases} x > 0 \\ 2^{x-1} \neq 2^{\sqrt{x}} \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x-1 \neq \sqrt{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$N > 0 \quad \log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{8}x^2) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}^2 x - \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} + \log_{\frac{1}{2}} x^2 \right) > 0$

$\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 3 > 0$ diseq. di 2° grado in $\log_{\frac{1}{2}} x$.

L'eq. associata ha soluzioni $(\log_{\frac{1}{2}} x)_{1/2} = 1 \pm 2 = \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$ e quindi:

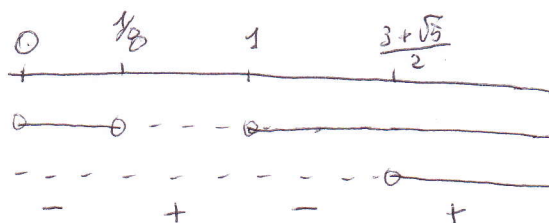
la diseq. vale se $\log_{\frac{1}{2}} x < -1$ o $\log_{\frac{1}{2}} x > 3$

$$\Leftrightarrow x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \vee 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x > 2 \vee 0 < x < \frac{1}{8}$$

$D > 0 \quad 2^{x-1} > 2^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x-1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ (x-1)^2 > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 1 \\ x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \rightarrow x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Applico le regole del segno per $x > 0$:



$$ID =]\frac{1}{8}, 1[\cup]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg^2(x-1) - 2 \cos(x-1) + 2}{\ln^4(x) - 2(x-1)^4} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg^2 y + 2(1 - \cos y)}{\ln^4(1+y) - 2y^4} \quad \text{poich\'e} \\ &\quad \lg y \sim y, \quad 1 - \cos y \sim \frac{1}{2}y^2, \quad \ln(1+y) \sim y \\ &\stackrel{\text{poich\'e } x-1=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + y^2}{y^4 - 2y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^2}{-y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2}{y^2} = -\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. ID: \frac{x^3-1}{x} \geq 0 \quad N \geq 0 \quad x^3-1 \geq 0 \quad x \geq 1 \\ D > 0 \quad x > 0 \end{aligned}$$

$$ID = (-\infty, 0[\cup [1, +\infty)$$

Il dominio non \u00e8 simmetrico rispetto a 0 e quindi g non pu\u00f2 essere pari o dispari.

A intersezione con asse y poich\'e $0 \notin ID$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \quad (1,0) \text{ intersec. con asse } x$$

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in ID, \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Osservazioni:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = \sqrt{\frac{-1}{0^-}} = +\infty \quad x=0 \text{ Az. Verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x}} = +\infty \quad \nexists \text{ as. obliq. a } \pm\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1 \quad (\text{eventuale coeff. ang. as. obliq. } m \neq 1 \text{ se } x \rightarrow +\infty, m = -1 \text{ se } x \rightarrow -\infty) \\ \text{Ecco a distinguendo i casi} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - x = +\infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1-x^2}{x(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x)} = 0$$

Analogamente a $-\infty$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x = +\infty - \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - x)} = 0$$

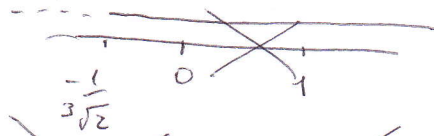
Dunque $y = x$ Az. ob. a $+\infty$, $y = -x$ Az. ob. a $-\infty$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3-1)}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} \cdot \frac{2x^3+1}{x^2}$$

$$ID(y') = ID(y) - \{1\}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} y' = +\infty$ $x=1$ pto di semicuspide. La funzione parte dal punto $(1,0)$ tangente alla retta $x=1$ e perciò risolve verso il basso.

$$y' > 0 \Leftrightarrow 2x^3+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$



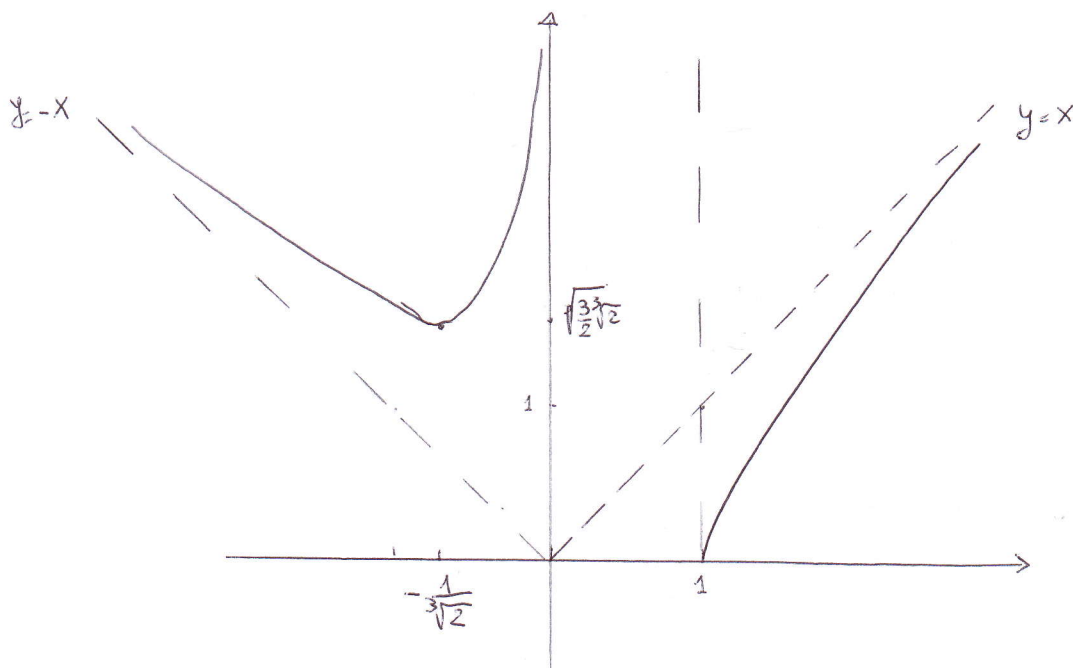
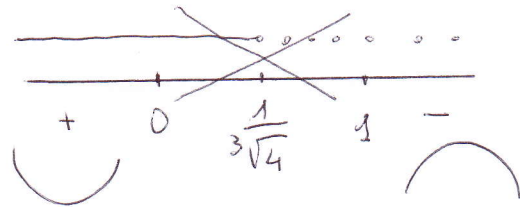
$$m \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{2} \end{cases} \quad m \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{1}{2} \frac{\{6x^2 + 1\} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - (2x^3+1) \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} \cdot \frac{2x^3+1}{x^2} \cdot x^2 + 2x \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} \right)}{x^4 \cdot \frac{x^3-1}{x}}$$

$$= \frac{6x^4 \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - (2x^3+1) \left(\frac{2x^3+1+4x \cdot \frac{x^3-1}{x}}{2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} \right)}{2x^3(x^3-1)\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} = \frac{2 \cdot 6x^4 \cdot \frac{x^3-1}{x} - (2x^3+1)(6x^3-2)}{2x^3(x^3-1)\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}$$

$$= \frac{12x^6 - 12x^3 - 12x^6 + 2}{2x^3(x^3-1)\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} = \frac{3(-4x^3+1)}{2x^3(x^3-1)\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow x^3 < \frac{1}{4} \Rightarrow x < \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$



5. i) Posto $t = \sqrt{\frac{x-1}{x}} \Rightarrow x+t^2 = x-1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-t^2} \quad dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt$

si ha

$$\int \frac{1}{5x-1} \sqrt{\frac{x-1}{x}} dx = \int \frac{1}{\frac{5}{1-t^2}-1} \cdot t \cdot \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt = 2 \int \frac{t^2}{\frac{4+t^2}{1-t^2} \cdot (1-t^2)^2} dt$$

$$= -2 \int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+4)} dt = -2 \int \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+4)} dt$$

Per le formule di Hermite $\exists A, B, C, D > 0$ s.t.

$$\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+4)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{ct+D}{t^2+4} =$$

$$= \frac{A(t+1)(t^2+4) + B(t-1)(t^2+4) + (ct+D)(t^2-1)}{(t-1)(t+1)(t^2+4)}$$

$$\Rightarrow A(t+1)(t^2+4) + B(t-1)(t^2+4) + (ct+D)(t^2-1) = t^2$$

Se $t = -1$: $-2 \cdot 5B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{10}$

$t = 1$: $2 \cdot 5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{10}$

$t = 0$: $\frac{4}{10} + \frac{4}{10} - D = 0 \Rightarrow D = \frac{4}{5}$

$t = 2$: $\frac{24}{10} + \frac{8}{10} + 6C + 3 \cdot \frac{4}{5} = 4 \Rightarrow 6C = 4 - \frac{16}{5} - \frac{12}{5} \Rightarrow C = 0$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{2}{10}}{t-1} + \frac{\frac{2}{10}}{t+1} + \frac{-\frac{8}{5}}{t^2+4} \right) dt = -\frac{1}{5} \ln|t-1| + \frac{1}{5} \ln|t+1| - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x}} + 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1} \right| - \frac{4}{5} \arctg \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) + C.$$

ii) Poiché la funzione è definita e continua in $(-\infty, 0[\cup]1, +\infty)$, si ha

• f è integ. in s.i. in $[-3, 0[$ essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5x-1} \sqrt{\frac{x-1}{x}} = -\infty$ con ord $\frac{1}{2} < 1$;

• f non è integ. in $]0, 1]$ poiché non è definita in questo intervallo;

• f non è integ. in $[1, +\infty)$ perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{5x-1}}_0 \underbrace{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}_1 = 0$ con ordine 1.