

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

21 febbraio 2025

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$8iz - (z - 4)\bar{z} + \frac{(\sqrt{3} + i)^{12}}{(1 + i\sqrt{3})^6} = i^{2018}.$$

2. Calcolare i seguenti limiti giustificando il risultato e precisando eventualmente l'ordine di infinito e/o di infinitesimo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 - x} - 2x) \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - 2x) \sin \frac{1}{x}.$$

3. Determinare il dominio della funzione

$$y = \left(\frac{\sqrt{4x - x^2} - 2x}{\ln^2 x - \ln x^2} \right)^\pi.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \left| \frac{x^3 - 1}{x} \right|.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = x^3 e^{-x^2}$$

- i) calcolare l'integrale indefinito;
ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[0, 1]$, $[0, +\infty)$ e in $(-\infty, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1+i\sqrt{3})^6} = \left(\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{1+i\sqrt{3}} \right)^6 = \left(\frac{3-1+2i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \right)^6 = \left(\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}} \right)^6 = 6,$

$i^{2018} = i^2 \cdot (i^4)^{504} = -1$, posto $z = x+iy$ l'equazione diventa

$$8ix - 8y - z \cdot \bar{z} + 4\bar{z} + 64 = -1 \Leftrightarrow 8ix - 8y - x^2 - y^2 + 4x - 4iy + 65 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8y - x^2 - y^2 + 4x - 65 = 0 \\ 8x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 + 16x - 4x - 65 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$5x^2 + 12x - 65 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 325}}{5} = \frac{-6 \pm 19}{5} = \begin{cases} -5 \\ \frac{13}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -10 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = \frac{26}{5} \end{cases}$$

L'equazione ha 2 soluzioni

$$z_1 = \frac{13}{5} + i \frac{26}{5} \quad e \quad z_2 = -5 + 10i$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 - x} - 2x) \sin \frac{1}{x} = 0$

perché prodotto di una funzione infinitesima $\sqrt{x^2 - x} - 2x$ per una funzione limitata $\sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - 2x) \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2} - 2x) \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x) \sin \frac{1}{x}$$

$\downarrow$ trascuro $-x$ infinito di ordine rispetto a x^2
 $\downarrow$ $\sqrt{x^2} = |x| = x$ se $x \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} - \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} - \frac{\sin y}{y} = -1$$

$\frac{1}{x} = y$

Calcolo ora ordine di infinitesimo della funzione per $x \rightarrow 0$: poiché

$$\sqrt{x^2 - x} - 2x \text{ ha ordine } \frac{1}{2} \text{ (per principio sottrazione infinitesimi)}$$

$$\sqrt{x^2 - x} \sim \sqrt{-x} \text{ ha ord } \frac{1}{2} \text{ e prevale su } -2x \text{ che ha ordine 1)}$$

aha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - 2x) \sin \frac{1}{x}}{(-x)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ e la funzione al numeratore

ha ordine non confrontabile con $\frac{1}{2}$ poiché il rapporto $\sin \frac{1}{x}$ non è discosto

da 0. la funzione ha però ordine $> \frac{1}{2} - \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ poiché (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - 2x) \sin \frac{1}{x}}{(-x)^{\frac{1}{2} - \varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-x} \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{-x} \cdot (-x)^{-\varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x)^{\varepsilon} \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{prodotto di}$$

funzione infinitesima per limitata).

$$3. \frac{\sqrt{4x - x^2} - 2x}{\ln^2 x - \ln x^2} \geq 0$$

Studio dominio della frazione e poi applico regole del segno nel dominio.

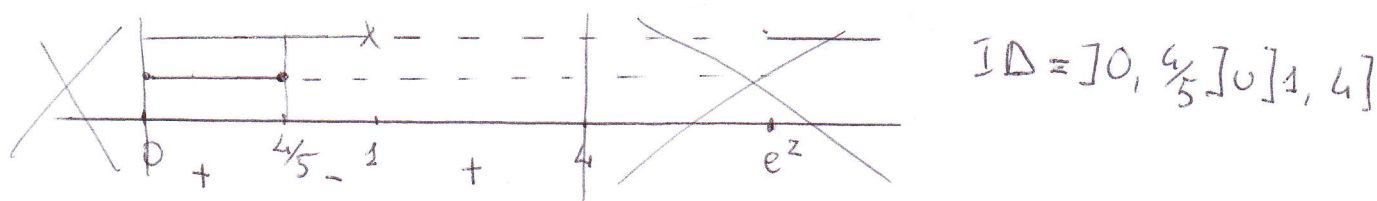
$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad 0 < x \leq 4 \quad (\text{non studio denominatore } \neq 0 \text{ perché lo imporrò tra poco})$$

$$N \geq 0 \quad \sqrt{4x - x^2} \geq 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - x^2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - x^2 \geq 4x^2 \\ 5x^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{4}{5}$$

$$D > 0 \quad \ln^2 x - \ln x^2 > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 2 \ln |x| > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 2 \ln x > 0$$

tolgo il valore assoluto
essendo $\log^2 x$ definito per $x > 0$

$$\Leftrightarrow \ln x < 0 \vee \ln x > 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > e^2$$



$$4. \text{ID: } \left| \frac{x^3 - 1}{x} \right| > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 1}{x} \neq 0 \quad \begin{cases} x^3 - 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

$$\text{ID} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow \ln \left| \frac{x^3 - 1}{x} \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{x^3 - 1}{x} \right| = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = \pm x \quad x^3 \mp x - 1 = 0$$

Non si sa risolvere l'equazione di 3° e quindi si omette lo studio delle intersezioni con asse x e, per lo stesso motivo, della positività di f .

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \ln \left| \frac{x^3-1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \ln \left| \frac{x^2}{1-\frac{1}{x}} \right| = +\infty$ con ordine molto lento

(3)

Asintoti orizzontali e as. obliqui essendo $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x^3-1}{x} \right| = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ \text{posto } y = \left| \frac{x^3-1}{x} \right|}} \ln y = +\infty$

per gli ordini

$x=0$ As. verticale completo

$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left| \frac{x^3-1}{x} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \ln y = -\infty$

$x=1$ As. vert. completo

$y' = \frac{x}{x^3-1} \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3-1)}{x^2} = \frac{2x^3+1}{x(x^3-1)}$

$ID y' = ID y$ ∇ gli angoli o cuspidali

$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+1}{x(x^3-1)} > 0$

$2x^3+1 > 0$

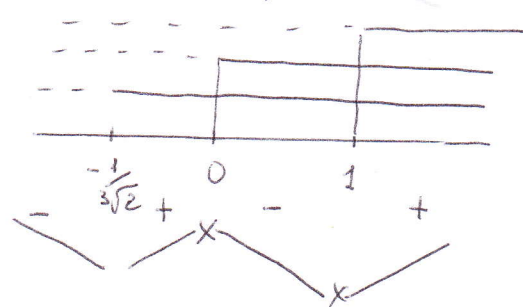
$x > -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$x > 0$

$x > 0$

$x^3 > 1$

$x > 1$



La funzione decresce in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ e in $(0, 1)$
 cresce in $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$ e in $(1, +\infty)$

$m \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \ln \left| \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \right| = \ln \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} > 0 \end{cases}$

$y'' = \frac{6x^2(x^4-x) - (2x^3+1)(4x^3-1)}{(x^4-x)^2} = \frac{6x^6 - 6x^3 - 8x^6 - 4x^3 + 2x^3 + 1}{(x^4-x)^2} = \frac{-2x^6 - 8x^3 + 1}{(x^4-x)^2}$

$y'' > 0 \Leftrightarrow 2x^6 + 8x^3 - 1 < 0$ Posto $x^3 = t$ che

$2t^2 + 8t - 1 < 0$

$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{18}}{2} = \begin{cases} \frac{-4-3\sqrt{2}}{2} < 0 \\ \frac{-4+3\sqrt{2}}{2} > 0 \end{cases}$

$\frac{-4-3\sqrt{2}}{2} < t < \frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$ e quindi

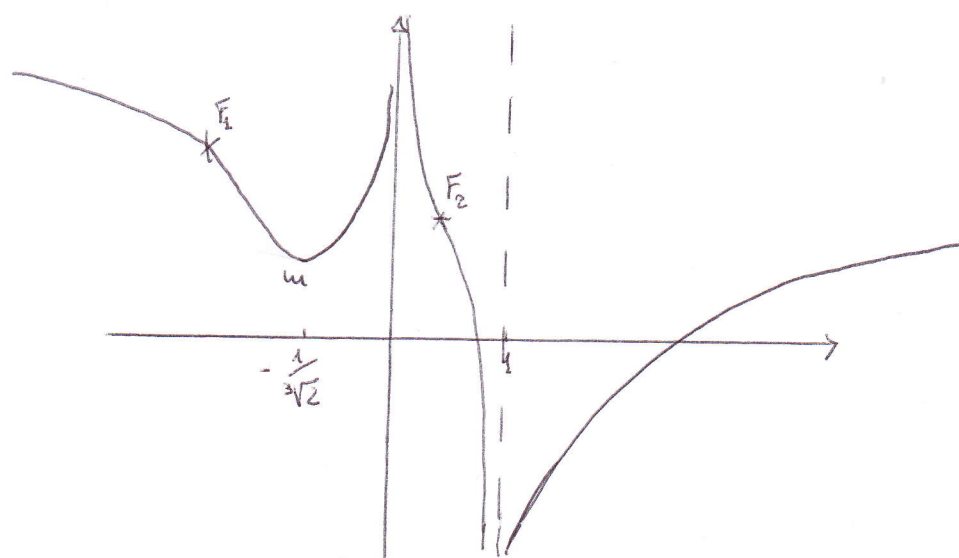
$y'' > 0$ per $\frac{-4-3\sqrt{2}}{2} < x^3 < \frac{-4+3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$-\sqrt[3]{\frac{4+3\sqrt{2}}{2}} < x < \sqrt[3]{\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}}$

La funzione è concava in $(-\sqrt[3]{\frac{4+3\sqrt{2}}{2}}, 0)$ e in $(0, \sqrt[3]{\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}})$
 convessa in $(-\infty, -\sqrt[3]{\frac{4+3\sqrt{2}}{2}})$ e in $(\sqrt[3]{\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}}, 1)$ e in $(1, +\infty)$.

(4)

La funzione ha due flessi: uno di ascisse negative, e l'altro di ascisse comprese tra 0 e 1.



Dal grafico si deduce che f è positiva per $x < 0$, $0 < x < \alpha_1 < 1$ e $x > \alpha_2$ mentre si annulla nei pt. $\alpha_1 \in]0, 1[$ e $\alpha_2 > 1$.

$$\begin{aligned} 5.i) \int x^3 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int x^2 (-2x e^{-x^2}) dx = -\frac{1}{2} \int x^2 D(e^{-x^2}) dx \stackrel{P.A.}{=} -\frac{1}{2} (x^2 e^{-x^2}) + \frac{1}{2} \int 2x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}) + C = -\frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

ii) g è integrabile in senso classico in $[0, 1]$ perché continua in $[0, 1]$ intervallo chiuso e limitato (si noti che la funzione è continua in $\mathbb{R}$).
 g è integrabile in s.i. in $(-\infty, 0]$ perché continua e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^2} = 0 \text{ con ordine comunque grande e quindi } > 1.$$

g è integrabile in s.i. in $\mathbb{R}$ perché continua e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-x^2} = 0 \text{ con ord. comunque grande, quindi è}$$

integ. in s.i. in $(-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty)$ e quindi lo è in $\mathbb{R}$.