

Corso di laurea in Chimica

Esame - Esonero di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

29 gennaio 2025

1. Risolvere la seguente equazione

$$8iz - (z - 4) \overline{(z - 4)} + i + \frac{(\sqrt{3} + i)^{12}}{(1 + i\sqrt{3})^6} = i^{2025}$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|^3 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

trovare, se esistono, valori reali di α per cui

i) f è continua, ii) f è derivabile, iii) f è di classe C^1 .

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \tan^2 x}{e^{-x} - \cos x + x - x^2}.$$

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della seguente funzione

$$g(x) = x - \ln(x^2 - |x| + 1).$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1}{\cos^3 x} dx,$$

i) calcolarne l'integrale indefinito;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[0, 1]$ e in $[0, \frac{\pi}{2}[$.

N.B. Chi ha superato il primo esonero deve fare solo gli esercizi 3, 4 e 5.

Svolgimento

1. Si osservi che, posto $z = x + iy$, si ha

$$(z-4)(\overline{z-4}) = |z-4|^2 = |x-4+iy|^2 = (x-4)^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2.$$

Inoltre
$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1+i\sqrt{3})^6} = \left(\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{1+i\sqrt{3}} \right)^6 = \left(\frac{3-1+2i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \right)^6 = \left(\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}} \right)^6 = 2^6 = 64$$

$$i^{2025} = i^{2024} \cdot i = (i^4)^{506} \cdot i = i$$

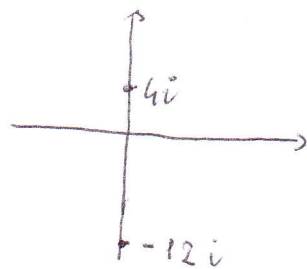
e quindi l'equazione diventa

$$3i(x+iy) - x^2 + 8x - 16 - y^2 + i + 64 = i \Leftrightarrow$$

$$3ix - 8y - x^2 + 8x - 16 - y^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 8y - 48 = 0 \end{cases} \rightarrow y_{2} = -4 \pm 8 = \begin{cases} -12 \\ 4 \end{cases}$$

L'equazione ha due soluzioni $z_1 = -12i$ e $z_2 = 4i$



2. i) La funzione è continua se $x \neq 0$ perché prodotto e composta di funzioni continue. Se $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^3 \sin \frac{1}{x} = 0$$

perché prodotto di funzione infinitesimale per funz. limitata essendo $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \neq 0$.

Segue che f cont. in $x = 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \text{ Dunque } f \text{ è continua } \Leftrightarrow \alpha = 0$$

ii) Se $x \neq 0$ f è derivabile perché prodotto e composta di funzioni derivabili; se $x = 0$ f potrebbe essere derivabile solo se $\alpha = 0$ (se $\alpha \neq 0$ f non continua in $x = 0 \Rightarrow f$ non derivabile in $x = 0$).

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 |x| \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$$

segue che f è derivabile in $x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ con $f'(0) = 0$.

(iii) Per verificare se $f \in C^1$ vediamo se (2)

lim $f'(x) = f'(0)$ cioè calcolo
 $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(3|x| \cdot \frac{x}{|x|} \sin \frac{1}{x} + |x|^3 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(3|x| \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} + x \cdot \cos \frac{1}{x} \right) = 0 = f'(0) \quad \left(\text{usando ancora il fatto che il prodotto di } f \text{ infinitesimo per } g \text{ limitata \& infinitesimo} \right)$$

dunque $f \in C^1$ se $x=0$

N.B. Usando il Corollario del T. di de l'Hôpital si poteva evitare la dim. di f derivabile in $x=0$ con la definizione e calcolare direttamente il $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

3. Poiché $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

per $x \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

2. La che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{tg}^2 x}{e^{-x} - \cos x + x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2}{1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + \cancel{x} - \cancel{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} - x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^3) - \cancel{x^2} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{-\frac{x^3}{6}} = 6 \end{aligned}$$

trascurando infinitesimi di ordine superiore

4. ID: $x^2 - |x| + 1 > 0 \Leftrightarrow |x|^2 - |x| + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ essendo $\Delta < 0$

ID = $\mathbb{R}$ f non è pari né dispari poiché $f(-x) \neq \pm f(x)$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x \in \mathbb{R} \text{ tale che } (|x|^2 - |x| + 1) \end{cases}$$

Non si riesce a studiare! Dopo aver disegnato la funzione si

deducendo che l'equazione ha l'unica soluzione $x=0$

(3)

In modo analogo, non si riesce a studiare direttamente la positività della funzione.

∇ asintoti verticali perché la funzione è continua in $\mathbb{R}$

Perché $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln(x^2 - |x| + 1) = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x^2 - |x| + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x^2 = +\infty$

per gli ordini essendo ord $x^2 >$ ord $|x|$ per gli ordini essendo $\ln x$ di ord. piccolo

segue che ∇ asintoti orizzontali. Invece

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x - \ln(x^2 - |x| + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x} = 1$
per gli ordini

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x - \ln(x^2 - |x| + 1) - x = -\infty$ ∇ asintoti obliqui

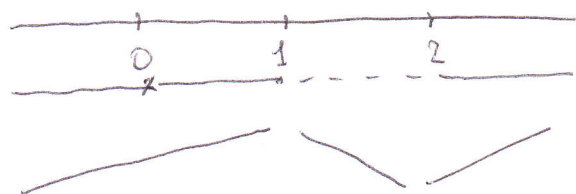
$y' = 1 - \frac{2x - \frac{x}{|x|}}{x^2 - |x| + 1} = \begin{cases} 1 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} & \text{se } x > 0 \\ 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Perché $\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 1-1=0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} = 1+1=2$ $\Rightarrow x=0$ pto angoloso
 $y'_-(0)=0 \neq y'_+(0)=2$

$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ tolgo i denominatori che sono sempre positivi essendo $\Delta < 0$

$\begin{cases} x^2-x+1-2x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+x+1-2x-1 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 2 \vee x < 0$



f è crescente in $(-\infty, 0[$, in $]0, 1]$ e in $[2, +\infty)$. Poiché la funzione è continua in 0, sarà crescente in $(-\infty, 1]$ e in $[2, +\infty)$ e decresce in $[1, 2]$.

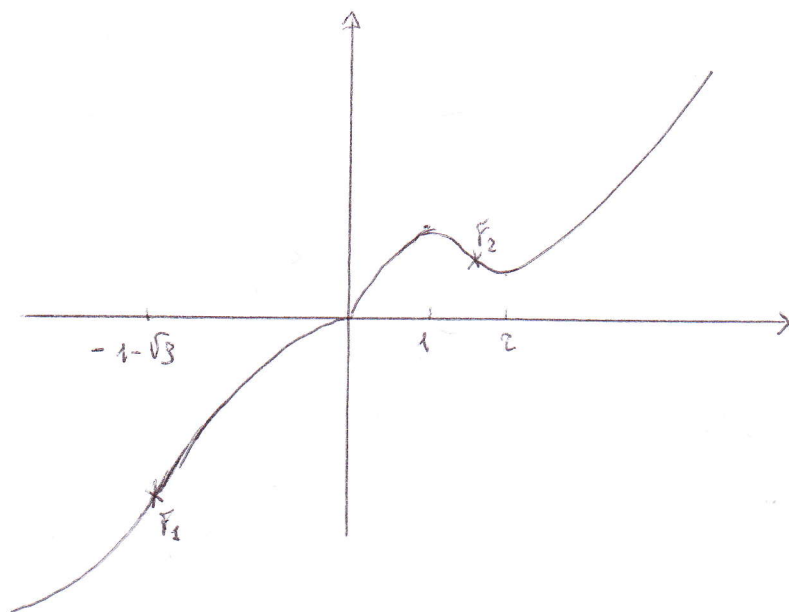
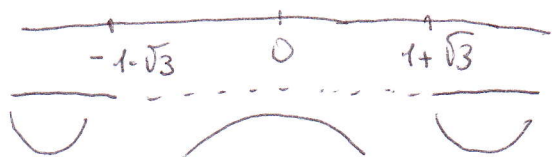
$$M \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad m \begin{cases} x=2 \\ y=2-\ln 3 (>0) \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} D \left(1 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) = - \frac{2(x^2-x+1) - (2x-1)^2}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2x^2-2x-1}{(x^2-x+1)^2} & \text{se } x > 0 \\ D \left(1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) = - \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 + \sqrt{3} \vee -1 - \sqrt{3} < x < 1 - \sqrt{3}$$

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

f convessa in $(-\infty, -1-\sqrt{3})$ e in $(1+\sqrt{3}, +\infty)$
e concava in $(-1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$



A posteriori, dal grafico di f si deduce che la funzione è positiva per $x > 0$.

$$5. i) \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \operatorname{Drg} x dx = \text{integraz per parti}$$

$$= \frac{\operatorname{Drg} x}{\cos x} - \int \operatorname{Drg} x \cdot \frac{+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \int \frac{1}{\cos^3 x} dx + \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - \int \frac{1}{\cos^3 x} dx + \int \frac{1}{\cos x} dx$$

e quindi $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \int \frac{1}{\cos x} dx \right].$

Integraz

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

posto $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow$

$x = 2 \operatorname{arctg} t$

$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$= \int \frac{2}{(1-t)(1+t)} dt = \int \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \right) dt = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + C$$

$$\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=2 \end{cases} \quad = \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$$

Dunque $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$

ii) Poiché la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, segue che:
 h è continua in $[0, 1]$ intervallo chiuso e limitato e quindi è integrabile in senso classico in $[0, 1]$.

h è continua in $[0, \frac{\pi}{2})$ ma $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos^3 x} = +\infty$ con ord $3 > 1$

essendo $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos^3 x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^+ \\ -x + \frac{\pi}{2} = y}} \frac{1}{\cos^3(\frac{\pi}{2} + y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^3 y} = +\infty$

con ord 3 essendo $\operatorname{sen} y \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Per criteri di integrabilità per gli integrali impropri del 1° tipo, h non è int. in s.i. in $[0, \frac{\pi}{2})$ e $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx = +\infty$.