

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

12 novembre 2024

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$z^6 + 4z^3 + 4 - i = \frac{1+i}{i-1}.$$

2. Calcolare al variare di $\alpha > 0$ i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^\alpha} - 1}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^\alpha} - 1}{\sin^2 x}.$$

3. Determinare il dominio della funzione

$$y = \left(\frac{\sqrt{x^2 - x - 2} - x - 3}{\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)} \right)^\pi.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{|x|} \right).$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[0, 1[$, $]1, 2]$ e in $[2, +\infty[$.

Svolgimento

1. Poiché $\frac{1+i}{i-1} = \frac{(1+i)^2}{i^2-1} = \frac{2i}{-2} = -i$ l'equazione diventa

$$z^6 + 4z^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z^3 + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -2 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-2} \quad \text{dove}$$

$$\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{2(\cos \pi + i \sin \pi)} = \left\{ \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

L'equazione ha 6 soluzioni a due a due coincidenti (di modulo $\sqrt[3]{2}$)

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = -\sqrt[3]{2}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{1/2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{1/2} - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \forall x > 0$ e $\sin^2 x \sim x^2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin^2 x} = +\infty$ perché $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} \geq 1$ quindi

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin^2 x} \geq \sqrt{1+x^2} - 1 \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \text{Teor. divergenza} \\ \text{obbligatoria} \end{array} \right)$$

3. $\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-x-2} - x - 3}{\log_{1/2}(\log_2 x)} \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Applico la regola del segno solo per } x \geq 2! \\ x \leq -1 \vee x \geq 2 \\ x > 1 \end{array} \Rightarrow x \geq 2$

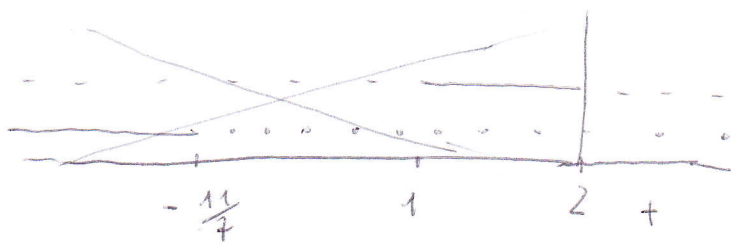
$$N \geq 0 \quad \sqrt{x^2-x-2} \geq x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 \geq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-x-2 \geq (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 2 \\ x < -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2-x-2 \geq x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3 \vee -3 \leq x \leq -\frac{11}{7}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{11}{7}$$

$$D > 0 \quad \log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \log_2 x < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

(2)



$$ID = [2, +\infty)$$

$$4. \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{|x|}\right)$$

$$ID: \frac{x^2-1}{|x|} > 0 \Rightarrow N > 0 \quad x^2-1 > 0 \\ D > 0 \quad |x| > 0$$

$$x < -1 \vee x > 1 \quad ID = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x \neq 0$$

$$\text{Perché } f(-x) = f(x) \quad \forall x \in ID$$

f è pari e posso studiare solo per $x > 0$ e poi ribaltare il grafico rispetto asse y

Studio dominio

$$f(x) = \ln \frac{x^2-1}{x} \quad x > 1$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x^2-1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} = 1 \quad x^2-x-1=0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ non acc.} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ acc.} \end{cases}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x^2-1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} > 1 \Leftrightarrow x^2-x-1 > 0 \\ \downarrow \\ (x > 0) \quad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{non acc.} \quad \text{acc.}$$

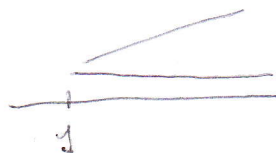
$$f(x) > 0 \text{ se } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty \quad x=1 \quad \text{As. Vert.}$$

$$\text{posto } y = \frac{x^2-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2-1}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty \quad \begin{matrix} \Delta \text{ As. orizzontale e} \\ \Delta \text{ As. obliqua (per gli ordini)} \end{matrix}$$

$$y' = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{2x^2-x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} \quad \forall x > 1$$



$$y' > 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow x^2-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x > 1$$

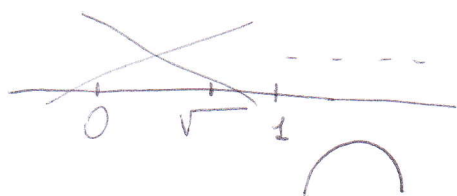
f cresce in $]1, +\infty)$

$$y'' = D \frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{2x(x^2-x) - (x^2+1)(3x^2-1)}{(x^3-x)^2} = \frac{-x^4-4x^2+1}{(x^3-x)^2}$$

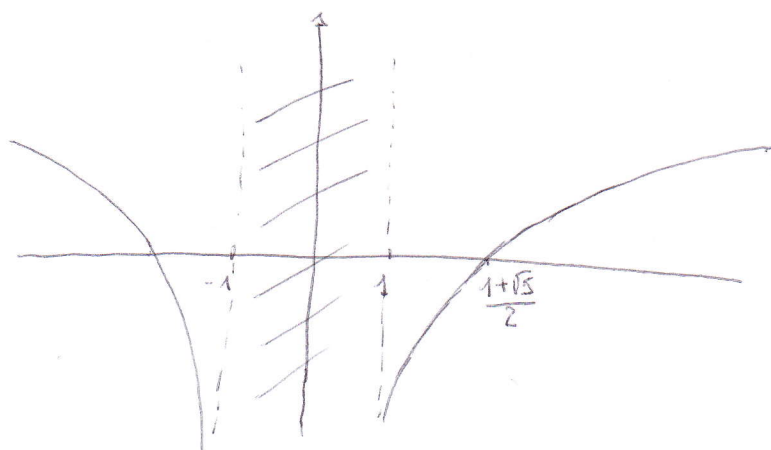
$$y'' > 0 \Leftrightarrow x^4+4x^2-1 < 0 \quad \text{Poniamo } x^2 = t \quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5} \quad -2-\sqrt{5} < t < -2+\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow -2-\sqrt{5} < x^2 < -2+\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow -\sqrt{-2+\sqrt{5}} < x < +\sqrt{-2+\sqrt{5}} \quad \text{ma perche } x > 1$$

sempre



$$y'' < 0 \quad \text{se } x \neq 1 \Rightarrow f \text{ concava}$$



Diremo g_f per $x > 1$
e pi ribalto rispetto
asse y

$$5. i) \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} x dx \quad \text{pongo } \sqrt{x^2-1} = t \Rightarrow x^2-1 = t^2 \quad x = \sqrt{t^2+1}$$

$$2x dx = 2t dt$$

$$= \int \frac{(t^2+1)^{3/2}}{t} dt = \int (t^2+1) dt = \frac{t^3}{3} + t + c = \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-1} + c$$

$$ii) \text{ poiche } g \text{ è definita per } x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

la funzione non è integrabile in $[0, 1]$ perché non è ivi definita.

$$\text{In } [1, 2] \text{ } g \text{ è continua e } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \underbrace{\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}}_{\downarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}_{\downarrow +\infty} = +\infty$$

con ordine $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow g$ integ. in ai.

$$\text{In } [2, +\infty) \text{ } g \text{ è continua e positiva ma } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \neq 0$$

$\Rightarrow g$ non è integ. in ai.