

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

15 ottobre 2024

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$(z + i)^4 = (1 + i)^2 + 2i^{21} + 2i \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^9.$$

2. Determinare gli asintoti della funzione

$$y = \frac{1}{x \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)}.$$

3. Studiare la disequazione

$$\sqrt{\ln^2 |x| - \ln |x|} < \ln |x| + 1.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \exp \left(\frac{x}{x+1} \right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\tan^3 x + \tan x}{(\tan^2 x - 2 \tan x + 1)(\tan x + 2)}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[0, \frac{\pi}{4}[$, $[0, \frac{\pi}{6}]$ e in $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

Soluzioni

1. Poiché $(1+i)^2 = 1-1+2i$ $i^{21} = (i^4)^5 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$$(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^3 = \cos 3\pi + i \sin 3\pi = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

l'equazione diventa

$$(z+i)^4 = 2i + 2i - 2i \Rightarrow$$

$$(z+i) = \sqrt[4]{2i} = \sqrt[4]{2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \right) | k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

l'equazione ha 4 soluzioni

$$z_0 = -i + \sqrt[4]{2} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) \quad z_1 = -i + \sqrt[4]{2} (\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8})$$

$$z_2 = -i + \sqrt[4]{2} (\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}) \quad z_3 = -i + \sqrt[4]{2} (\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8})$$

2. La funzione è definita per $\begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x^2+x \geq 0 \\ x(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x}) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

(si noti che $\sqrt{x^2+x+1} \neq \sqrt{x^2+x}$ perché elevando al quadrato $1 \neq 0$)

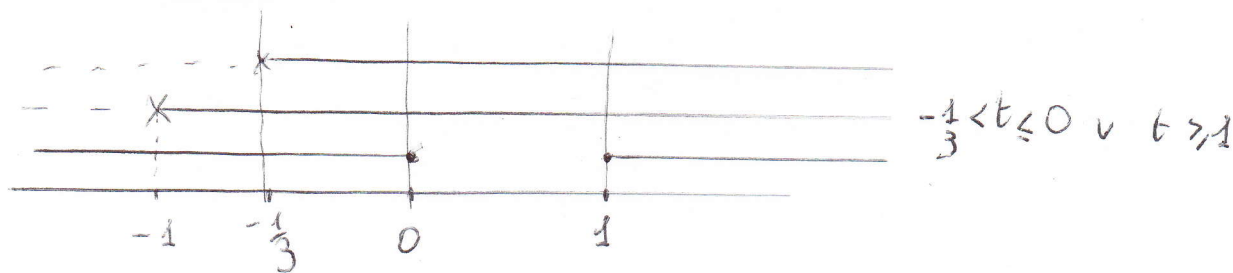
$$D = (-\infty, -1] \cup]0, +\infty)$$

A.V. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x})} = \frac{1}{0 \cdot 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad x=0 \text{ A.V. a destra}$

A.D. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x})} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+x}}{x(\cancel{x^2+x+1} - \cancel{x^2+x})} = \frac{\infty}{\infty}$ trascurando infiniti più lent
 $= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2|x|}{x} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} y=2 \text{ A.D. a } +\infty \\ y=-2 \text{ A.D. a } -\infty \end{matrix}$

3. Posto $|x|=t$ la disuguaglianza diventa $\sqrt{t^2-t} < t+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t \geq 0 \\ t+1 > 0 \\ t^2-t < (t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \vee t \geq 1 \\ t > -1 \\ t^2-t < t^2+2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \vee t \geq 1 \\ t > -1 \\ t > -\frac{1}{3} \end{cases}$$



Tornando a $\ln|x|$, deve essere

$$-\frac{1}{3} < \ln|x| \leq 0 \quad \vee \quad \ln|x| \geq 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{3}} < |x| \leq 1 \quad \vee \quad |x| \geq e$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < -e^{-\frac{1}{3}} \quad \vee \quad e^{-\frac{1}{3}} < x \leq 1 \quad \vee \quad x < -e \quad \vee \quad x \geq e \Leftrightarrow$$

$$x \in S = (-\infty, -e] \cup]e^{-\frac{1}{3}}, -1] \cup]e^{\frac{1}{3}}, 1] \cup [e, +\infty).$$

$$4. f(x) = \frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-1\}$$

f non è né pari né dispari poiché il suo dominio non è simmetrico rispetto all'origine

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{e viceversa} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad (0,0) \text{ unico pto di intersezione di } \mathcal{G}_f \text{ con gli assi}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \vee \quad x > 0$$

Asintoti

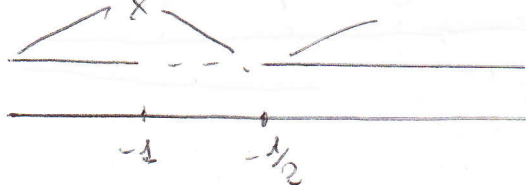
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x} e^{\frac{x}{x}} = 1 \cdot e = e \quad y = e \text{ A.O. } x \rightarrow \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} = -\infty \cdot e^{-\infty} = 0 \quad \text{pu } \mathcal{G}_f \text{ ordini}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} = +\infty \cdot e^{+\infty} = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty \quad x = -1 \text{ A.V. solo da destra}$$

$$y' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} + \frac{x}{x+1} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} \cdot \left(1 + \frac{x}{x+1}\right) \quad \forall x \neq -1$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \vee \quad x > -\frac{1}{2}$$



$$\text{in } \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ y = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{e} \end{cases}$$

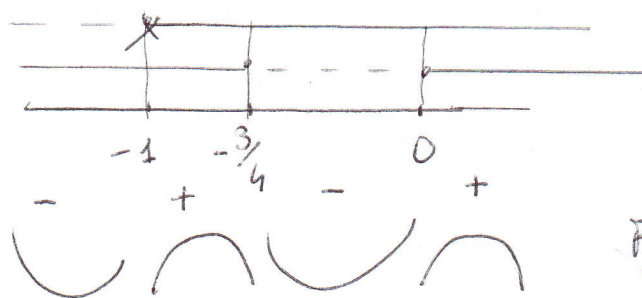
$$y'' = D \left(e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{2x+1}{(x+1)^3} \right) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{2x+1}{(x+1)^3} + e^{\frac{x}{x+1}} \frac{2(x+1)^3 - 3(2x+1)(x+1)^2}{(x+1)^6} \quad (3)$$

$$= e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \left[\frac{2x+1}{(x+1)^5} + \frac{(x+1) \cdot 2(x+1)^2 - 3(2x+1)(x+1)}{(x+1)^5} \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^4} \left[\frac{2x+1 + 2x^2 + 4x + 2 - 6x^2 - 6x - 3x - 3}{x+1} \right] =$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^4} \cdot \frac{-4x^2 - 3x}{x+1} \quad \forall x \neq -1$$

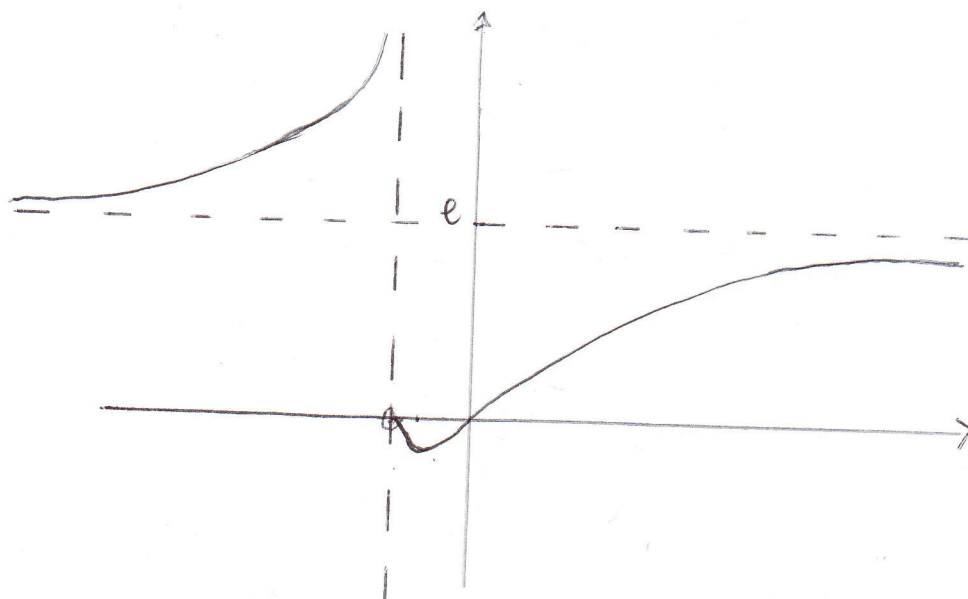
$$y'' > 0 \Leftrightarrow -\frac{4x^2 + 3x}{x+1} > 0 \quad \begin{array}{ll} N > 0 & 4x^2 + 3x > 0 \\ D > 0 & x+1 > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x < -\frac{3}{4} \vee x > 0 \\ x > -1 \end{array}$$



$$y'' > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee -\frac{3}{4} < x < 0$$

$$F_1 \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = f(-\frac{3}{4}) \end{cases}$$

$$F_2 \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



N.B. la funzione parte da $x = -1$ con $x > -1$ con tangente orizzontale perché $\lim_{x \rightarrow -1^+} y' = +\infty \cdot e^{-\infty} = 0$ per gli ordini

(4)

5) i) $\int \frac{\lg^3 x + \lg x}{(\lg^2 x - 2\lg x + 1)(\lg x + 2)} dx =$

posto $\lg x = t \Rightarrow$
 $x = \arg t \Rightarrow$
 $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$$= \int \frac{t^3 + t}{(t^2 - 2t + 1)(t + 2)(t^2 + 1)} dt = \int \frac{t(t^2 + 1)}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)} dt$$

Per Heuriste $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$ s'.

$$\frac{t}{(t-1)^2(t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} + \frac{d}{dt} \frac{e}{t-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} - \frac{e}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{A(t-1)(t+2) + B(t-1)^2 - e(t+2)}{(t-1)^2(t+2)}$$

Per confronto dei termini segue che

$$t = A(t-1)(t+2) + B(t-1)^2 - e(t+2).$$

Se $t = 1$: $1 = 0 + 0 - 3e \Rightarrow e = -1/3$

Se $t = 2$: $-2 = 0 + 9B + 0 \Rightarrow B = -2/9$

Se $t = 0$: $0 = -2A + B - 2e \Rightarrow A = \frac{B-2e}{2} = \frac{-2/9 + 2/3}{2} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Dunque

$$\int \frac{t}{(t-1)^2(t+2)} dt = \int \frac{2/9}{t-1} dt - \int \frac{2/9}{t+2} dt + \int \frac{d}{dt} \frac{-1/3}{t-1} dt$$

$$= \frac{2}{9} \ln|t-1| - \frac{2}{9} \ln|t+2| - \frac{1}{3(t-1)} + C$$

$$= \frac{2}{9} \ln|\lg x - 1| - \frac{2}{9} \ln|\lg x + 2| - \frac{1}{3(\lg x - 1)} + C.$$

ii) g è definita su $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq -\arctan x + k\pi$

In $[0, \frac{\pi}{4}[$ g è continua ma $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{(\lg x - 1)^2} \frac{\lg^3 x + \lg x}{\lg x + 2} = +\infty$
 con ordine 2 perché si vede, applicando le def., che $\lg x - 1$ è
 un infinitesimo di ordine 1 e quindi $(\lg x - 1)^2$ è infinitesimo di ord 2.

In fatti $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\lg x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 2 \neq 0.$

Segue che g non è integrabile in s. i. in $[0, \frac{\pi}{4}[$.

(5)

In $[0, \frac{\pi}{6}]$ invece g è integrabile (in senso classico) perché continua in un intervallo chiuso e limitato.

In $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ infine g è integrabile in senso improprio perché continua

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan^3 x + \tan x}{(\tan x - 1)^2 (\tan x + 2)} = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y = \tan x}} \frac{y^3 + y}{(y^2 - 1)^2 (y + 2)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3}{y^3} = 1 \in \mathbb{R}$$

x principio di sostituzione degli infiniti

(g prolungabile per continuità in $\frac{\pi}{2}$).