

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

23 settembre 2024

1. Risolvere la seguente equazione (ricordare che $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$)

$$z \operatorname{Im} z = (\bar{z} + 1)^2 + 2i^8 - 2i^{60}.$$

2. Determinare gli asintoti della funzione

$$y = \sqrt[3]{\ln x + 1} - \sqrt[3]{\ln x - 1}.$$

3. Scrivere, se esistono, le equazioni delle rette tangenti al grafico di

$$y = x |\sin x|$$

nei punti di ascissa $x_0 = 0$ e $x_0 = \pi$.

4. Data la funzione

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x + 2}}$$

- i) studiare la funzione e disegnarne il grafico approssimativo;
 - ii) stabilire, giustificando la risposta, se è invertibile nel suo dominio.
5. Data la funzione $f(x)$ del punto precedente
- i) calcolare l'integrale indefinito;
 - ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[-3, -2]$, $]1, 2[$ e in $[6, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = a + ib$, poiché $i^8 = (i^4)^2 = 1$ e $i^{60} = (i^4)^{15} = 1$, l'equazione diventa

$$(a+ib)b = (a-ib+1)^2 \Leftrightarrow ab + ib^2 = a^2 - b^2 + 1 - 2abi + 2a - 2bi \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ab - a^2 + b^2 - 1 - 2a = 0 \\ b^2 + 2ab + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab - a^2 + b^2 - 1 - 2a = 0 \\ b(b + 2a + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ -a^2 - 1 - 2a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -2a - 2 \\ -2a^2 - 2a - a^2 + 4a^2 + 4 + 8a - 1 - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ (a+1)^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -2a - 2 \\ a^2 + 4a + 3 = 0 \end{cases} \Delta < 0 \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

L'equazione ha solo una soluzione $z = -1$.

2. ID: $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[3]{\ln x + 1} - \sqrt[3]{\ln x - 1} \right) = \infty + \infty =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\ln x} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{\ln x}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\ln x}} \right) = \text{posto } \frac{1}{\ln x} = y$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{1/3} - (1-y)^{1/3}}{y^{1/3}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{(1+y)^{1/3} - 1}{y} - \frac{(1-y)^{1/3} - 1}{y} \right] \cdot y^{2/3}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{(1+y)^{1/3} - 1}{y} + \frac{(1-y)^{1/3} - 1}{-y} \right] \cdot y^{2/3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot 0 = 0$$

$$\left(\text{poiché } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^a - 1}{t} = a \right)$$

$\nexists$ As. verticali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\ln x + 1} - \sqrt[3]{\ln x + 1} \right) = +\infty - \infty = \text{ragionando come prima}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{(1+\frac{1}{3})^{1/3} - 1}{\frac{1}{3}} + \frac{(1-\frac{1}{3})^{1/3} - 1}{-\frac{1}{3}} \right] \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot 0 = 0 \quad y = 0 \quad \text{As. orizz.$$

I due limiti si potrebbero calcolare anche moltiplicando e dividendo per il fattore razionalizzante:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{\ln x + 1} - \sqrt[3]{\ln x - 1}) &= \lim_{\substack{y = \ln x \\ y \rightarrow -\infty}} (\sqrt[3]{y+1} - \sqrt[3]{y-1}) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt[3]{y+1} - \sqrt[3]{y-1})(\sqrt[3]{(y+1)^2} + \sqrt[3]{y^2-1} + \sqrt[3]{(y-1)^2})}{\sqrt[3]{(y+1)^2} + \sqrt[3]{y^2-1} + \sqrt[3]{(y-1)^2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt[3]{y+1})^3 - (\sqrt[3]{y-1})^3}{\sqrt[3]{(y+1)^2} + \sqrt[3]{y^2-1} + \sqrt[3]{(y-1)^2}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y+1 - y+1}{\sqrt[3]{(y+1)^2} + \sqrt[3]{y^2-1} + \sqrt[3]{(y-1)^2}} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{\ln x + 1} - \sqrt[3]{\ln x - 1}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(y+1)^2} + \sqrt[3]{y^2-1} + \sqrt[3]{(y-1)^2}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

3. Perché $D_x |\sin x| = |\sin x| + x \frac{\sin x}{|\sin x|} = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \sin x \neq 0$
 vedo se la funzione è derivabile in $x=0$ e $x=\pi$ applicando la definizione
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x |\sin x|}{x} = \sin 0 = 0 \Rightarrow f$ è derivabile in $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x |\sin x|}{x - \pi} \quad \text{con } f'(0) = 0$$

perché $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ -\sin x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^\pm} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi^\pm} \pm \left(\frac{x \sin x}{x - \pi} \right) = \pm \pi \cdot \lim_{x \rightarrow \pi^\pm} \frac{\sin x}{x - \pi} = \pm \pi \cdot \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(\pi + y)}{y} \\ &= \pm \pi \cdot \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{-\sin y}{y} = \pm \pi \end{aligned}$$

Dunque $f'_+(\pi) = +\pi, \quad f'_-(\pi) = -\pi$

Si conclude che per $x=0$ l'eq. della retta tangente $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ diventa $y=0$ mentre per $x=\pi$ $\exists$ due rette tangenti una a destra e una a sinistra di equazioni rispettivamente

$$\begin{aligned} t_+ : y - f(\pi) &= f'_+(\pi)(x - \pi) & \text{cioè } y &= +\pi(x - \pi) \\ t_- : y - f(\pi) &= f'_-(\pi)(x - \pi) & \text{cioè } y &= -\pi(x - \pi) \end{aligned}$$

4. Poiché $\ln \sqrt{\frac{x^2-5x}{x^2-3x+2}} = \ln \left(\frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2}$,

studio la funzione nella forma $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2}$

ID: $\frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} > 0$ $N > 0$ $x < 0 \vee x > 5$
 $D > 0$ $x < 1 \vee x > 2$

ID = $(-\infty, 0[\cup]1, 2[\cup]5, +\infty)$ f non è né pari né dispari

Poiché $0 \notin \text{ID}$, f interseca con asse y

$\begin{cases} y=0 \\ \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} = 1 \Rightarrow x^2-5x = x^2-3x+2 \Rightarrow x = -1$

$(-1; 0)$ intersezione con asse x

Positività: $f(x) > 0 \Rightarrow \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} > 1$

$\frac{-2x-2}{x^2-3x+2} > 0$ $N > 0$ $x < -1$
 $D > 0$ $x < 1 \vee x > 2$

$f(x) > 0$ per $x < -1 \vee 1 < x < 2$

Asintoti verticali: polo $y = \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2}$ che

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$ $x=0$ AV

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$ $x=1$ AV

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$ $x=2$ AV

$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow -\infty} \ln y = -\infty$ $x=5$ AV

Asintoti orizzontali

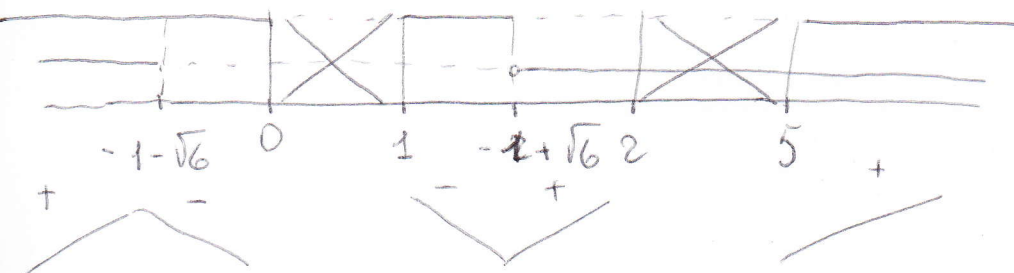
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$ $y=0$ Asintoto per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x} \cdot \frac{(2x-5)(x^2-3x+2) - (x^2-5x)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 6x^2 + 15x + 4x - 10 - 2x^3 + 10x^2 + 3x^2 - 15x}{(x^2-5x)(x^2-3x+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2x^2 + 4x - 10}{(x^2-5x)(x^2-3x+2)} = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x^2-5x)(x^2-3x+2)}$$

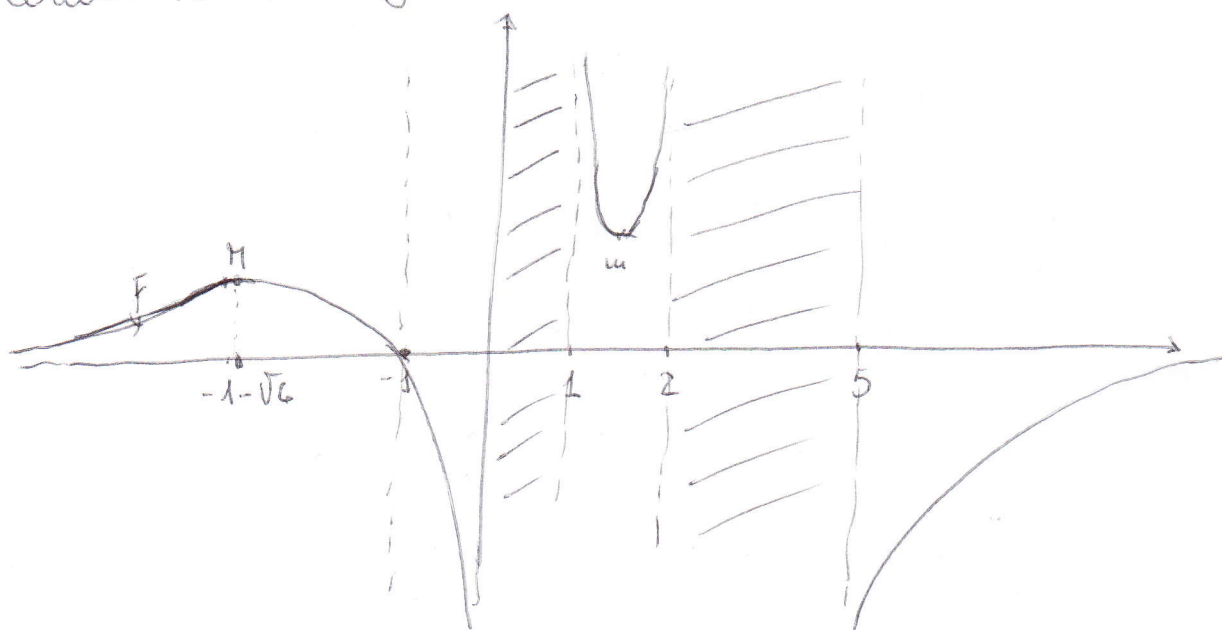
$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 5}{(x^2-5x)(x^2-3x+2)} > 0 \quad \begin{array}{l} N > 0 \quad x < -1-\sqrt{6} \vee x > -1+\sqrt{6} \\ D > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$



$$m \left\{ \begin{array}{l} x = -1+\sqrt{6} \\ y = f(-1+\sqrt{6}) > 0 \end{array} \right.$$

$$M \left\{ \begin{array}{l} x = -1-\sqrt{6} \\ y = f(-1-\sqrt{6}) > 0 \end{array} \right.$$

Non calcolo y'' perché lungo e si può comunque prevedere la concavità della funzione.



ii) La funzione non è invertibile perché non è iniettiva (ci sono rette orizzontali che intersecano g_f in più punti, cioè esistono valori diversi di x in cui f assume lo stesso valore).

5. i) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} dx = \frac{1}{2} \int (\cancel{1}x) \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} dx$

integrato per
= parti

$$\frac{1}{2} x \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+2x-5}{(x^2-5x)(x^2-3x+2)} dx$$

$$= \frac{1}{2} x \ln \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{3}{4} \ln|x-2| - \frac{15}{6} \ln|x-5| + C$$

poiché $\frac{x^2+2x-5}{(x-5)(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-5} =$

$$= \frac{A(x-2)(x-5) + B(x-1)(x-5) + C(x-1)(x-2)}{(x-5)(x-2)(x-1)}$$

Per $x=1$: $-2 = -4A \rightarrow A = \frac{1}{2}$

$x=2$: $3 = -4B \rightarrow B = -\frac{3}{4}$

$x=5$: $30 = 12C \rightarrow C = \frac{15}{6}$

e quindi $\int \frac{x^2+2x-5}{(x-5)(x-1)(x-2)} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{15}{6} \ln|x-5| + C.$

ii). f è integrabile in $[-3, -2]$ CID perché continua in un intervallo chiuso e limitato.

• f è integrabile in $]\frac{1}{2}, 2[$ perché è continua e negli estremi tende a $+\infty$ ma con ordine comunque finito essendo $\forall x > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(x)}{1/(x-1)^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\frac{x^2+2x-5}{(x^2-5x)(x^2-3x+2)}}{-x(x-1)^{-x-1}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2+2x-5}{(x^2-5x)(x-1)(x-2)} \cdot (x-1)^{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{1/(2-x)^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+2x-5}{(x^2-5x)(x-1)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)^{x+1}}{x} = 0$$

• f non è integrabile in $[6, +\infty)$ perché per $x \rightarrow +\infty$ va a 0 con ord. 1 essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1/x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-5}{(x^2-5x)(x^2-3x+2)} \cdot \left(-\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^4}{x^4} = -1 \neq 0.$$