

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

10 luglio 2024

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^2 + z \cdot \bar{z} = (1 - i)^7.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{\frac{5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5}{\log_3^2 x^2 + \log_{\frac{1}{3}} |x|}}.$$

3. Studiare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{\ln(1 + x^4) - \arctan^5 x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sin^2 x}{\ln(1 + x^4) - \arctan^5 x}.$$

4. Data la funzione

$$g(x) = 2 \ln^2 |x| - 5 \ln |x| + 2$$

- i) studiare la funzione e disegnarne il grafico approssimativo;
- ii) stabilire, giustificando la risposta, se è continua, derivabile, iniettiva e surgettiva.

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\arctan(x+2)}{x^2},$$

- i) calcolare l'integrale indefinito;
- ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[-2, -1]$, $]0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché

$$(1-i)^7 = ((1-i)^2)^3 (1-i) = (1+i^2-2i)^3 (1-i) = -8i^3 (1-i) = 8i(1-i) = 8i+8,$$

e l'equazione, posta $z = a+ib$, diventa

$$(a+ib)^2 + a^2 + b^2 = 8+8i \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - \cancel{b^2} + 2abi + a^2 + \cancel{b^2} = 8+8i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = +2 \vee \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$$

L'equazione ha 2 radici $z_1 = 2+2i$ e $z_2 = -z_1 = -2(1+i)$.

2. $\frac{5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5}{\log_3^2 x^2 + \log_{\frac{1}{3}} |x|} \geq 0$ ID: $\begin{cases} |x| > 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0$ Applico regole del segno

$N \geq 0$ $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 \geq 0$ posto $t = 5^x$ studio

$t^2 - 6t + 5 \geq 0$ $t_2 = 3 \pm 2 = \frac{1}{5}$ $t \leq 1 \vee t \geq 5$

$\Rightarrow 5^x \leq 1 \vee 5^x \geq 5 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1$

$D > 0$ $\log_3^2 t^2 + \log_{\frac{1}{3}} |x| > 0 \Rightarrow (\log_3 x^2)^2 + \frac{\log_3 |x|}{\log_3 \frac{1}{3}} > 0 \Rightarrow$

$4 \log_3^2 |x| - \log_3 |x| > 0 \Rightarrow$

$\log_3 |x| < 0 \vee \log_3 |x| > \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < |x| < 1 \vee |x| > \sqrt[4]{3} \Rightarrow$

$-1 < x < 1 \wedge x \neq 0 \vee x < -\sqrt[4]{3} \vee x > \sqrt[4]{3}$

————— x ——— x ——— x ——— x ——— x ———

$N \geq 0$

—————

+ $-\sqrt[4]{3}$ - -1 + 0 - 1 - $\sqrt[4]{3}$ +

ID = $(-\infty, -\sqrt[4]{3} [\cup] -1, 0 [\cup] \sqrt[4]{3}, +\infty)$

3. Si noti che $\lim_{x \rightarrow 0} \text{ord}(\sin^2 x) = 2$, $\text{ord}(\ln(1+x^4)) = 4$ e $\text{ord}(\arctg^5 x) = 5$.

Per le proprietà degli ordini trascuro infinitesimi di ordine maggiore e ottengo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{\ln(1+x^4) - \arctan^5 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{\ln(1+x^4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))2x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3}$$

Se invece studio il limite per $x \rightarrow +\infty$, posso trascurare $\sin^2 x$ (limitato) rispetto a x^2 e $\arctan^5 x$ (limitato) rispetto a $\ln(1+x^4)$. Dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sin^2 x}{\ln(1+x^4) - \arctan^5 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(1+x^4)} = +\infty \quad \text{poich\'e se } x \rightarrow +\infty$$

$\text{ord } x^2 = 2$ mentre $\ln(1+x^4)$ infinito di ordine comunque lento.

4. $g(x) = 2\ln^2|x| - 5\ln|x| + 2$

ID: $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad \forall x \in \text{ID}: g(-x) = g(x) \quad g \text{ pari}$

Posso studiare la funzione solo per $x > 0$, disegnare il grafico per $x > 0$ e poi ribaltarla rispetto all'asse y. D'ora in poi considero

$$y = 2\ln^2 x - 5\ln x + 2$$

Intersezioni con assi: $\nexists$ intersezione con asse y poich\'e $0 \notin \text{ID}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2\ln^2 x - 5\ln x + 2 \end{cases} \Rightarrow 2\ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0 \quad (\ln x)_{\frac{1}{2}} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

$\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e} \quad (\sqrt{e}; 0) \quad (e^2; 0)$ intersezioni con asse x

$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

Positivi: $2\ln^2 x - 5\ln x + 2 > 0 \Rightarrow \ln x < \frac{1}{2} \vee \ln x > 2 \Rightarrow$

$0 < x < \sqrt{e} \vee x > e^2$ funzione positiva in $]0, \sqrt{e}[\cup]e^2, +\infty[$
negativa in $[\sqrt{e}, e^2]$.

Asintoti

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\ln^2 x - 5\ln x + 2 = +\infty + \infty = +\infty \quad x > 0 \quad \text{A.V. sinistro}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln^2 x - 5\ln x + 2 = +\infty - \infty = +\infty$ per gli ordini poich\'e $\text{ord}(\ln^2 x) > \text{ord}(\ln x) \nexists \text{ A.O.}$

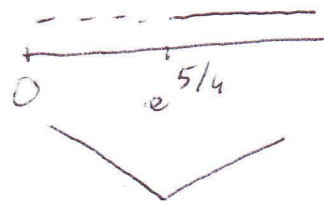
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln^2 x - 5\ln x + 2}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 0$ per gli ordini poich\'e $\text{ord}(\ln^2 x) < \text{ord } x$.

$\nexists$ as. obliqui

Studio della derivata prima

$$y' = 4 \ln x \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4 \ln x - 5}{x} \quad \forall x > 0$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{4 \ln x - 5}{x} > 0 \Leftrightarrow 4 \ln x - 5 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{4} \Rightarrow x > e^{5/4}$$



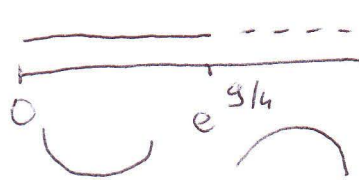
$$m \begin{cases} x = e^{5/4} \\ y = 2 (\ln e^{5/4})^2 - 5 \ln e^{5/4} + 2 = 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 2 = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

$$m \left(e^{5/4}; -\frac{9}{8} \right)$$

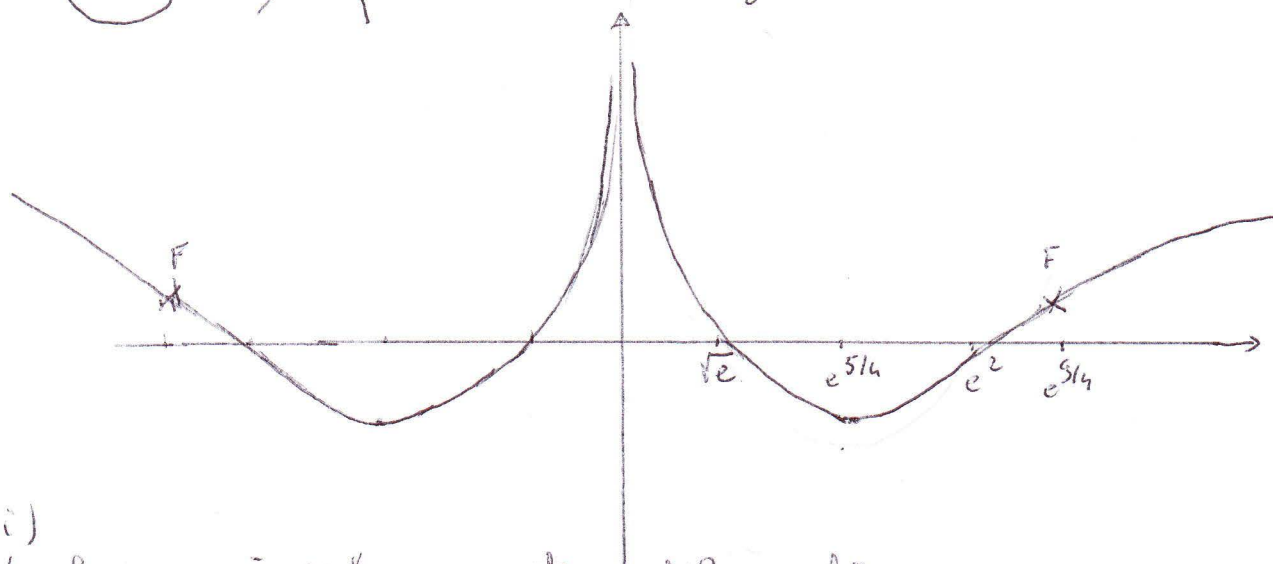
Studio della derivata seconda

$$y'' = \frac{\frac{4}{x} \cdot x - 4 \ln x + 5}{x^2} = \frac{9 - 4 \ln x}{x^2}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 9 - 4 \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 0 < x < e^{9/4}$$



$$F \begin{cases} x = e^{9/4} \\ y = 2 \cdot \frac{81}{16} - 5 \cdot \frac{9}{4} + 2 = \frac{7}{8} \end{cases} \quad F \left(e^{9/4}; \frac{7}{8} \right)$$



ii)

La funzione è continua e derivabile perché somma e composta di funzioni continue e derivabili; non è iniettiva essendo pari e quindi $g(-x) = g(x)$; non è surgettiva perché il suo codominio è $[-\frac{9}{8}, +\infty) \not\subset \mathbb{R}$.

5. $\int \frac{\arctg(x+2)}{x^2} dx = \int D\left(-\frac{1}{x}\right) \arctg(x+2) dx = (\text{integraz per parti})$

$$= -\frac{1}{x} \operatorname{arctg}(x+2) + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2} dx$$

Perché $\frac{1}{x[1+(x+2)^2]} = \frac{1}{x(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (4A+C)x + 5A}{x(x^2+4x+5)} \quad \text{per principio di identità dei polinomi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A+C=0 \\ 5A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1/5 \\ C=-4/5 \\ A=1/5 \end{cases} \quad \text{segue che}$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+4x+5)} dx = \int \left(\frac{1/5}{x} - \frac{\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2+4x+5} \right) dx = \frac{1}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+4x+5} dx$$

$$= \frac{1}{5} \ln|x| - \frac{1}{10} \left(\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx + \int \frac{4}{1+(x+2)^2} dx \right)$$

$$= \frac{1}{5} \ln|x| - \frac{1}{10} \ln(x^2+4x+5) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg}(x+2) + c.$$

Conclusione:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x^2} dx = -\frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x} + \frac{1}{10} \ln \frac{x^2}{x^2+4x+5} - \frac{2}{5} \operatorname{arctg}(x+2) + c.$$

ii) Perché $R(x)$ è continua in $\mathbb{R}-\{0\}$, segue che è integrabile in senso classico in $[-2, -1]$ essendo continua in intervallo chiuso e limitato.

In $]0, 1]$ $h(x)$ non è integrabile perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x^2} = +\infty$ con ordine $2 > 1$.

In $[1, +\infty)$ invece $h(x)$ è integrabile in s.i. perché è continua e

per $x \rightarrow +\infty$ $\frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x^2} = 0$ con ordine $2 > 1$.