

**Corso di laurea in Chimica**  
**Esame di**  
**ISTITUZIONI di MATEMATICHE I**

18 giugno 2024

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^2 + 2z - i = \left( \frac{1-i}{1+i} \right)^{400} + (\cos \pi + i \sin \pi)^7.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \left( \ln \left( \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \right) \right) \right)^\pi.$$

3. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \sin x + x \cos x}{x^4 + \tan^3 x}.$$

4. Data

$$g(x) = e^x \sqrt{2x+1}$$

i) studiare la funzione e disegnarne il grafico approssimativo;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso improprio in  $] -\infty, -1]$ , in  $[-1, 2]$  e in  $[3, +\infty[$ .

5. Calcolare

$$\int (\cos^3 x + \cos^4 x) dx.$$

## Solgimento

1. Poiché  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{400} = \left(\frac{(1-i)^2}{1-i^2}\right)^{400} = \left(\frac{1-1-2i}{2}\right)^{400} = (-i)^{400} = (i^4)^{100} = 1$

$(\cos \pi + i \sin \pi)^7 = (-1)^7 = -1$

l'equazione diventa  $z^2 + 2z - i = 0$  da cui

$$z = -1 + \sqrt{1+i} = -1 + \sqrt{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = -1 + \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} \right) \quad | k \in \{0, 1\}$$

$$= -1 \pm \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \quad (\text{N.B. Le radici quadrate di un numero complesso sono sempre 2 opposte tra loro})$$

L'equazione (come prevedibile poiché di 2° grado) ha 2 radici date da

$$-1 + \sqrt[4]{2} \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \quad \text{e} \quad -1 - \sqrt[4]{2} \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}.$$

2.  $\ln \left( \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \right) \right) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \right) \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

I:  $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} > 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$  I:  $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1} > 0$  Applico le regole del segno nel dominio dove per  $x+1 \geq 0$

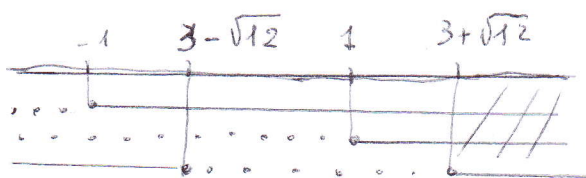
N > 0  $x > -1$   
D > 0  $x > 1$

Dunque la 1ª diseq. è soddisfatta per  $x > 1$ .

II  $\frac{2\sqrt{x+1} - x + 1}{x-1} \leq 0$  Poiché dato mettere a sistema con  $x > 1$  basta studiare  $N \leq 0$  dove

$$2\sqrt{x+1} \leq x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 4(x+1) \leq (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$x \leq 3 - \sqrt{12} \vee x \geq 3 + \sqrt{12}$$



$$x \geq 3 + \sqrt{12}$$

Conclusione  $\begin{cases} x > 1 \\ x \geq 3 + \sqrt{12} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3 + \sqrt{12}$

$$ID = [3 + \sqrt{12}, +\infty)$$

3. Poiché  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$   $\forall x \in \mathbb{R}$

$\tan x = x + o(x^2)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \sin x + x \cos x}{x^3 + \sqrt[3]{x^3}}$   $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\frac{x^3}{3}} - x + \cancel{\frac{x^3}{6}} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6) + x - \cancel{\frac{x^3}{2}} + \frac{x^5}{4!} + o(x^6)}{x^3}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{4!})x^5 + o(x^6)}{x^3} = 0$

poiché  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = 0$  e posso trascurare infinitesimo  $o(x^6)$  di ord. sup. e  $x^5$ .

4.  $g(x) = e^x \sqrt{2x+1}$  ID:  $2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$g$  non è pari né dispari poiché ID non è simmetrico rispetto a 0

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ e^x \sqrt{2x+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$   $(0,1) \quad (-\frac{1}{2},0)$   
intersezioni con assi

$y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$  La funzione è st. positiva  
per  $x > -\frac{1}{2}$  e annulla in  $x = -\frac{1}{2}$

Asintoti verticali poiché  $\nexists$  pt di accum. per ID che  $\notin$  ID

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \sqrt{2x+1} = +\infty$   $\nexists$  as. orizz. Inoltre  $\nexists$  as. obliqui poiché

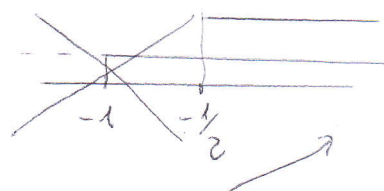
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sqrt{2x+1}}{x} = +\infty$  per gl ordini essendo ord  $e^x \gg 1$

$y' = e^x \sqrt{2x+1} + e^x \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{e^x(2x+1+1)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2e^x(x+1)}{\sqrt{2x+1}}$

ID( $y'$ ):  $2x+1 > 0$  cioè  $x > -\frac{1}{2}$ . Poiché  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{2e^x(x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{0^+} = +\infty$   
 $x = -\frac{1}{2}$  pt di semicuspide

(il grafico parte da  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$  con tangente verticale)

$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{\sqrt{2x+1}}(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

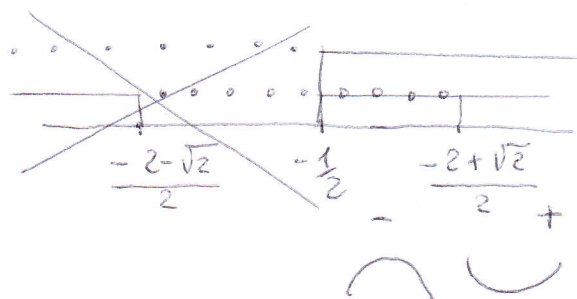


La funzione è st. crescente nel suo dominio.

$$y'' = D \frac{2e^x(x+1)}{\sqrt{2x+1}} = 2 \frac{[e^x(x+1) + e^x]\sqrt{2x+1} + e^x(x+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$$

$$= 2e^x \frac{(x+2)(2x+1) + x+1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} = 2e^x \frac{2x^2 + 4x + 1}{(2x+1)^{3/2}}$$

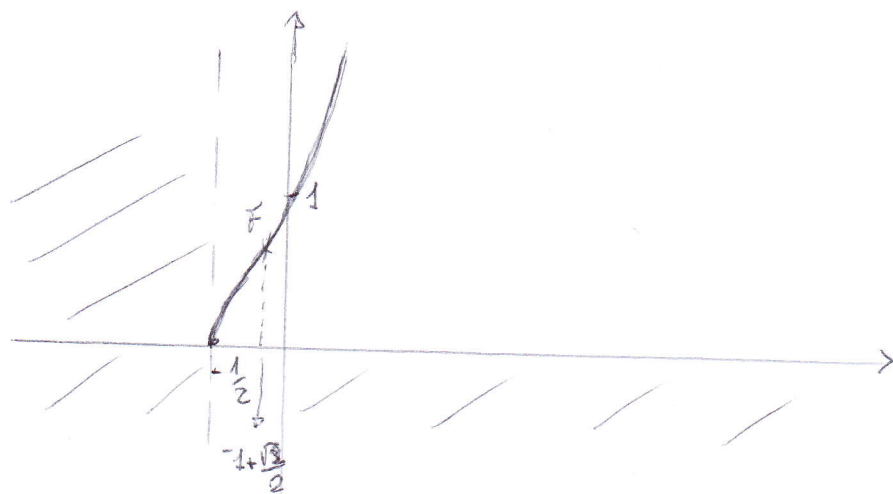
$$y'' > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$



$g$  concave in  $[-\frac{1}{2}, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}]$

convessa in  $[-1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

la funzione ha un flesso di ascissa  
 $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$



ii) la funzione non è integrabile in  $]-\infty, -1]$  e in  $[-1, 2]$  perché non è definita in questi intervalli mentre non è integrabile in  $[3, +\infty)$  perché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \sqrt{2x+1} = +\infty (\neq 0)$ .

$$5. \int (\cos^3 x + \cos^4 x) dx = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$\text{poiché: } \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

$\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

formula di bisezione

$$= \frac{1}{4} \left( x + \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) = \frac{1}{4} \left( x + \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$