

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

14 maggio 2024

1. Risolvere l'equazione

$$(z + 2 - i)^3 + i^{101} + 27 = \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}} \right)^4$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il dominio della funzione

$$y = \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \arctan(\ln(x+2)).$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+x}}.$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = 5 + 7(x^2 - 3)e^{-2x}$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1}{x(\ln^2 x - \ln x - 6)}$$

- i) calcolare

$$\int h(x) dx;$$

- ii) studiare l'integrabilità in senso improprio di h in $[-1, 0)$, in $(0, \frac{1}{100}]$ e in $[100, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $i^{101} = i^{100} \cdot i = (i^4)^{25} \cdot i = 1 \cdot i = i$,

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}} \right)^4 = \cos 4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) + i \sin 4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

l'equazione diventa $(z+2-i)^3 + i + 27 = i \Leftrightarrow (z+2-i)^3 = -27 \Leftrightarrow$

$$z+2-i = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27(\cos \pi + i \sin \pi)} = \left\{ 3 \left(\cos \frac{\pi+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{3} \right) \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

per $k=0$: $z+2-i = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow z = -2+i+3 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow$

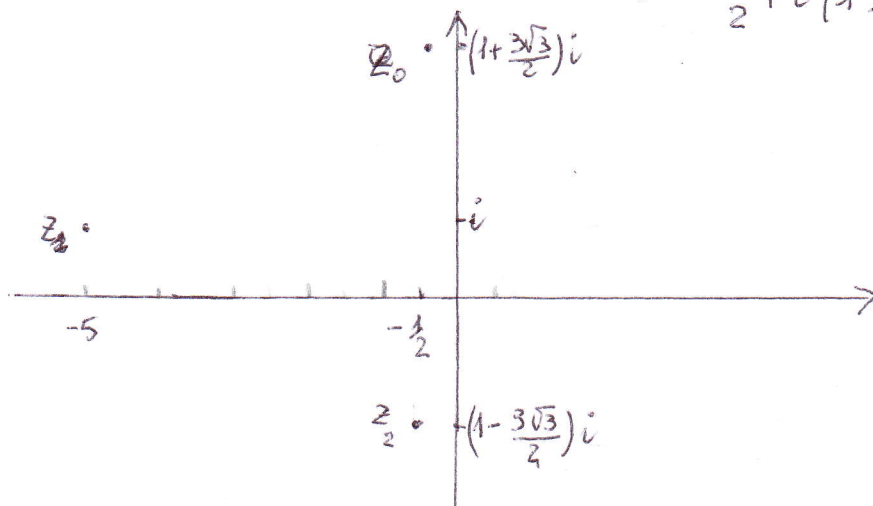
$$z_0 = -\frac{1}{2} + i \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

per $k=1$: $z+2-i = 3 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) \Rightarrow z_1 = -2+i-3 \Rightarrow z_1 = -5+i$

per $k=2$: $z+2-i = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \Rightarrow z_2 = -2+i + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow$

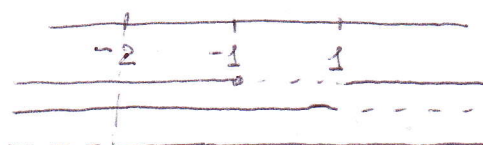
$$z_2 = -\frac{1}{2} + i \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right).$$

L'equazione ha tre soluzioni date da $-\frac{1}{2} + i \left(1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ e $-5+i$.



$$2. \begin{cases} -1 \leq \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \leq 1 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x > 1 \\ \frac{x+1-x+1}{x-1} \leq 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x > 1 \\ x < 1 \\ x > -2 \end{cases}$$



$$ID =]-2, -1]$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-1})(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+x})}{(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+x})(\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-1})}$$

ho moltiplicato
Numeratore e denominatore
per una stessa quantità

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+5-2x+1)(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+x})}{(x^2+4-x^2-x)(\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-1})} = \text{trascurio in finiti di ordine inferiore}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6(1+1)}{-x(\sqrt{2x} + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot \cancel{x}}{-x \cdot 2\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{6}{\sqrt{2x}} = 0.$$

$$4. y = 5 + 7(x^2 - 3)e^{-2x} \quad \text{ID} = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 5 - 21 = -16 \end{cases}$$

$$(0; -16)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 5 + 7(x^2 - 3)e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

non riesco a studiare l'equazione

$$y > 0 \quad 5 + 7(x^2 - 3)e^{-2x} > 0$$

non riesco a studiare la disequazione

(e dedurre positività e intersezioni con asse x a posteriori, dopo aver disegnato il grafico di f).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 + 7(x^2 - 3)e^{-2x} = 5 + \underbrace{\infty \cdot 0}_{0} = 5$$

$$y = 5 \quad \text{As. orizz. a } +\infty$$

per gli ordini

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + 7(x^2 - 3)e^{-2x} = 5 + \infty \cdot (+\infty) = +\infty \quad \text{As. orizz. a } -\infty$$

As. obliquo a $-\infty$ perché $y \rightarrow +\infty$ con ord. grande ($\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$)

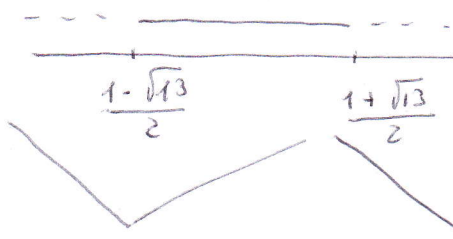
As. verticali perché g è continua in $\mathbb{R}$.

$$y' = 7[2xe^{-2x} + (x^2 - 3)(-2e^{-2x})] = 14(-x^2 + x + 3)e^{-2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 < 0$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$M \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ y = g\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$$

$$N \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ y = g\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$$

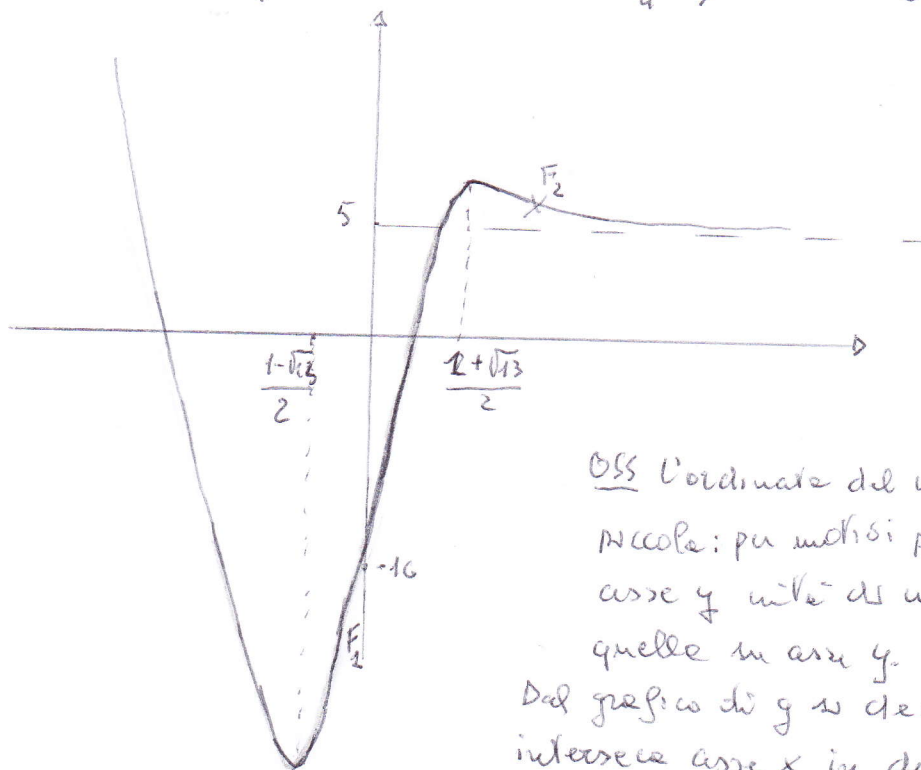
$$g''(x) = 14 [(-2x+1)e^{-2x} - 2e^{-2x}(-x^2+x+3)] = 14(2x^2 - 4x - 5)e^{-2x}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2-\sqrt{54}}{4} \vee x > \frac{2+\sqrt{54}}{4}$$



$$F_1 \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{54}}{4} \\ y = g\left(\frac{2-\sqrt{54}}{4}\right) \end{cases}$$

$$F_2 \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{54}}{4} \\ y = g\left(\frac{2+\sqrt{54}}{4}\right) \end{cases}$$



Oss l'ordinate del minimo è molto più piccola; più metici pratico lo passo su asse y unita di misure diverse da quelle su asse x.

Dal grafico di g si deduce che la funzione interseca asse x in due punti x_1 e x_2 e $g(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \vee x > x_2$.

5.i) Posto $\ln x = t$ e quindi $\frac{1}{x} dx = dt$ si ha

$$\int \frac{1}{x(\ln^2 x - \ln x - 6)} dx = \int \frac{1}{t^2 - t - 6} dt = \int \frac{1}{(t+2)(t-3)} dt = \int \left(\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-3} \right) dt =$$

$$\left(\text{dove } A \text{ e } B \text{ sono tali che } \begin{cases} A+B=0 \\ -3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 5B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=-\frac{1}{5} \\ B=\frac{1}{5} \end{matrix} \right)$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{5}}{t+2} dt + \int \frac{\frac{1}{5}}{t-3} dt = -\frac{1}{5} \ln|t+2| + \frac{1}{5} \ln|t-3| + C = \ln \sqrt[5]{\frac{|\ln x - 3|}{|\ln x + 2|}} + C$$

ii) Poiché B è definita per $\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x - \ln x - 6 \neq 0 \end{cases}$ cioè $D =]0, e^{-2}[\cup]e^2, e^3[\cup]e^3, +\infty[$

ha una è int. in $\mathbb{R}$, in $[0, 0)$ perché non è ivi definita. Poiché $]0, \frac{1}{100}] \subset]0, e^{-2}[$

ma $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(\ln^2 x - \ln x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln^2 x} = +\infty$ con ord < 1 una non discosto da 1, non posso applicare criterio di integrabilità degli int. impropri ma uso la defn.

di integrale improprio per cui

$$\int_0^{\frac{1}{100}} h(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{100}} h(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln \sqrt[5]{\left| \frac{\ln \frac{1}{100} - 3}{\ln \frac{1}{100} + 2} \right|} - \ln \sqrt[5]{\left| \frac{\ln \varepsilon - 3}{\ln \varepsilon + 2} \right|} \right]$$
$$= \ln \sqrt[5]{\left| \frac{\ln 100 + 3}{-\ln 100 + 2} \right|} \in \mathbb{R} \quad \text{e quindi } L \text{ è integ. in s.i. in } (0, \frac{1}{100}]$$

perché $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \frac{\ln \varepsilon - 3}{\ln \varepsilon + 2} \right| = \frac{+\infty}{+\infty} = 1$ per gli ordini e quindi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \sqrt[5]{\left| \frac{\ln \varepsilon - 3}{\ln \varepsilon + 2} \right|} = \ln 1 = 0.$$

In $[100, +\infty) \subset (e^3, +\infty)$ L è continua ma non si può come
prima applicazione criterio di integrabilità perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} = 0 \quad \text{con ord} > 1 \text{ ma non discosta da } 1.$$

Dalla definizione di integrale improprio si ha

$$\int_{100}^{+\infty} h(x) dx = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{100}^K h(x) dx = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[\ln \sqrt[5]{\left| \frac{\ln K - 3}{\ln K + 2} \right|} - \ln \sqrt[5]{\left| \frac{\ln 100 - 3}{\ln 100 + 2} \right|} \right]$$
$$= - \ln \sqrt[5]{\left| \frac{\ln 100 - 3}{\ln 100 + 2} \right|} \quad \text{e quindi } L \text{ è integ. in s.i. in } [100, +\infty)$$

perché ragionando come prima si ha che $\lim_{K \rightarrow +\infty} \ln \sqrt[5]{\left| \frac{\ln K - 3}{\ln K + 2} \right|} = 0.$