

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

3 aprile 2024

1. Risolvere l'equazione

$$z^3 = \frac{\left| \frac{1+2i}{1-i} \right| \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{(\sqrt{3} - i)^2}$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il dominio e la monotonia della funzione

$$y = \sqrt{x^4 - 16} + \arctan(\ln(x - 2)).$$

3. Studiare gli asintoti della funzione

$$f(x) = x \ln \left(\frac{1 + \ln x}{\ln x} \right).$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2} - x$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x - 4 \sin^2 x}$$

- i) calcolare

$$\int h(x) dx;$$

- ii) studiare l'integrabilità in senso improprio di h in $(0, 1]$ e in $[\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Svolgimento

1. Poiché $\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i-2}{1-i^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ che

$$\left| \frac{1+2i}{1-i} \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Inoltre $(\sqrt{3}-i)^2 = \left(2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \right)^2 = 4 \left(\cos \frac{11\pi}{3} + i \sin \frac{11\pi}{3} \right) = 4 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi \right) \right) = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

L'equazione diventa perciò

$$z^3 = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)} \Rightarrow z^3 = \frac{\sqrt{10}}{8} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) \right) \Rightarrow$$

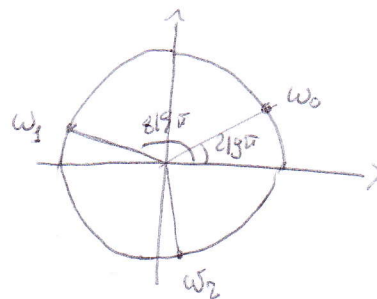
$$z^3 = \frac{\sqrt{10}}{8} \left(\cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{3} \right) \right) \text{ cioè } z^3 = \frac{\sqrt{10}}{8} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \text{ e quindi}$$

$$z = \left\{ \sqrt[3]{\frac{\sqrt{10}}{8}} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right) \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Per $k=0$: $w_0 = \frac{\sqrt[6]{10}}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right)$

$k=1$: $w_1 = \frac{\sqrt[6]{10}}{2} \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right)$

$k=2$: $w_2 = \frac{\sqrt[6]{10}}{2} \left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9} \right)$



Le tre radici sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{\sqrt[6]{10}}{2}$.

$$2. \begin{cases} x^4 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - 4)(x^2 + 4) \geq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x > 2 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

$$D =]2, +\infty)$$

Poiché $y' = \frac{2x^3}{2\sqrt{x^4-16}} + \frac{1}{1+\ln^2(x-2)} \cdot \frac{1}{x-2}$ è sempre positiva se $x > 2$

segue che la funzione è strettamente crescente nel suo dominio.

3. Prima di tutto studio il dominio: $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1+\ln x}{\ln x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x < -1 \vee \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

(2)

$$\Rightarrow 0 < x < e^{-1} \vee x > 1. \text{ Dunque } D =]0, e^{-1}[\cup]1, +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\frac{1 + \ln x}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\substack{\downarrow \\ -\infty = 0}} + 1 \right) = 0 \cdot \ln 1 = 0 \cdot 0 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{f prolungabile per} \\ \text{continuit  in } x=0 \\ \text{A as. verticale} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} x \ln \left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right) = e^{-1} \ln(-1+1) = e^{-1} \cdot (+\infty) = +\infty \quad x = e^{-1} \text{ A.V. a destra}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln \left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \quad x = 1 \text{ A.V. sinistra}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{\ln x} \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right) = +\infty \cdot \ln 1 = \infty \cdot 0 = \text{forma indeterminata}$$

$\frac{1}{\infty} = 0$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln \left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right)}{\frac{1}{\ln x}} = +\infty \quad \text{perch  } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \text{ per ordine}$$

A as. orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1 \quad \begin{array}{l} y \rightarrow 0 \\ y = \frac{1}{\ln x} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)}{x} = \ln 1 = 0 \quad \text{A as. obliqua}$$

$$4. \quad g(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2} - x \quad \text{ID: } x^3 - 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \vee x = 0$$

$$\text{ID} = [3, +\infty) \cup \{0\}$$

Intersezioni: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ con asse $\begin{cases} y=0 \\ \sqrt{x^3 - 3x^2} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x \geq 0 \vee x \geq 4$

$(0,0) (4,0)$ per $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$ Gf. passa da $(3,0)$ $(0,0)$ pto isolato

Positivit  $\sqrt{x^3 - 3x^2} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 - 3x^2 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=0 \vee x \geq 3 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 - 4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=0 \vee x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \vee x \geq 4$$

$\emptyset$

Asintoti: A asintoti verticali perch  A pti di accumulazione per ID che non appartengono al dominio.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - 3x^2} - x = +\infty - \infty = +\infty \quad \text{perch  } \sqrt{x^3 - 3x^2} \text{ ha ordine di inf. } = \frac{3}{2}$$

x ha ordine 1

A asintoti orizzontali

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x^2} - x}{x} = +\infty$ per gli ordini perché il numeratore è infinito di ordine $\frac{3}{2} > 1$ e il denominatore è infinito di ordine 1. Dunque $\nexists$ asintoti obliqui

$$y' = D(x\sqrt{x-3} - x) = \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} - 1 \quad ID(y') = \{x \mid x > 3\}$$

$$ID(y') = ID(y) - \{0, 3\}$$

$x=0$ pto isolato del dominio in cui non ha senso parlare di derivata

$x=3$ pto di semicuspide perché $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} - 1 = +\infty$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} - 1 > 0 \Leftrightarrow 2(x-3) + x - 2\sqrt{x-3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$3x - 6 > 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3x-6 > 0 \\ (3x-6)^2 > 4(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 2 \\ 9x^2 - 40x + 48 > 0 \quad \forall x \\ \Delta = 400 - 4 \cdot 9 \cdot 48 < 0 \end{cases}$$

$$y' > 0 \quad \forall x \in ID(y') \text{ cioè } x > 3$$

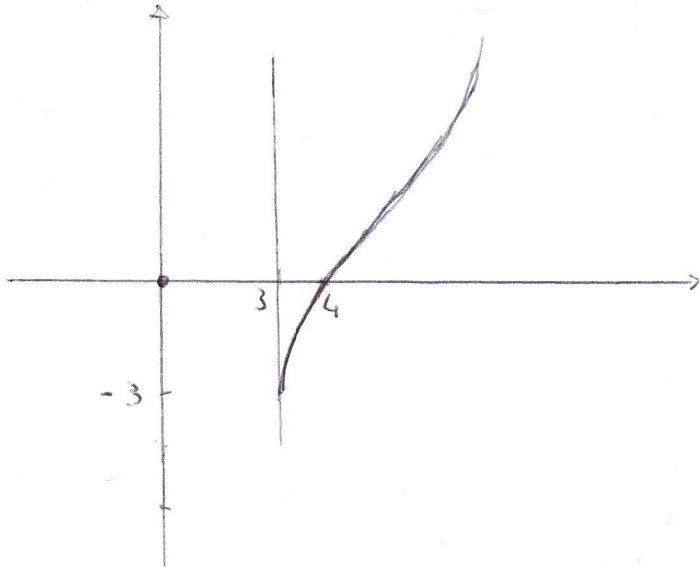
La funzione è st. crescente in $[3, +\infty)$.

$$y'' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x-3} - \frac{x}{\sqrt{x-3}}}{4(x-3)} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{2x-6-x}{4(x-3)^{3/2}} = \frac{2(x-3) + x - 6}{4(x-3)^{3/2}} = \frac{3x-12}{4(x-3)^{3/2}}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 3x-12 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

La funzione è convessa per $x > 4$
concava per $3 < x < 4$

$x=4$ pto di flesso



f_F ha un pto isolato $(0,0)$
e pi parte da $(3, -3)$
con tangente verticale
(quindi rivolto verso il
basso) e in $(4,0)$ cambia
concavità.

B. i) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x - 4 \sin^2 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin^4 x - 4 \sin^2 x} dx =$ posto $\sin x = t$
 $\cos x dx = dt$
 $= \int \frac{1-t^2}{t^4 - 4t^2} dt = \int \frac{1-t^2}{t^2(t-2)(t+2)} dx =$

Perco A, B, C, D costanti reali tali che

$$\frac{1-t^2}{t^2(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+2} + \frac{d}{dt} \frac{D}{t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+2} - \frac{D}{t^2}$$
$$= \frac{A t(t^2-4) + B t^2(t+2) + C t^2(t-2) - D(t^2-4)}{t^2(t-2)(t+2)} \Rightarrow$$

$$A(t^2-4) + B t^2(t+2) + C t^2(t-2) - D(t^2-4) = 1-t^2$$

Se $t=0$: $4D=1 \Rightarrow D=\frac{1}{4}$

$t=2$: $16B=-3 \Rightarrow B=-\frac{3}{16}$

$t=-2$: $-16C=-3 \Rightarrow C=\frac{3}{16}$

Se $t=1$: $-3A+3B-C+3D=0$ cioè $3A=3B-C+3D$

$$A = B - \frac{C}{3} + D = -\frac{3}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$= \int \left(\frac{-\frac{3}{16}}{t-2} + \frac{\frac{3}{16}}{t+2} + \frac{d}{dt} \frac{\frac{1}{4}}{t} \right) dt = \frac{3}{16} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + \frac{1}{4t} + \text{cost}$$

$$= \frac{3}{16} \ln \left| \frac{\sin x + 2}{\sin x - 2} \right| + \frac{1}{4 \sin x} + C = \frac{3}{16} \ln \left(\frac{\sin x + 2}{2 - \sin x} \right) + \frac{1}{4 \sin x} + C.$$

ii) $ID(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin^4 x - 4 \sin^2 x \neq 0\} = \{x \mid \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$

In $(0, 1]$ L è continua e

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x (\sin^2 x - 4)} = \frac{1}{0^+(-3)} = -\infty$ con ord $2 > 1$ (perché $\sin x \sim x$ ne ord 1 per $x \rightarrow 0$)

Dunque L non è integrabile in Δ in $(0, 1]$.

In $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ L è continua e

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x (\sin^2 x - 4)} = \frac{1}{0^+(-3)} = -\infty$ con ord $2 > 1 \Rightarrow L$ non è integ. in Δ in $[\frac{\pi}{2}, \pi)$

perché ord $(\sin x) = 1$ per $x \rightarrow \pi$ essendo $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1 \neq 0$