

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

11 marzo 2024

1. Posto $z = a + ib = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, risolvere la seguente equazione nel piano complesso

$$z^2 + |z - 1| - (1 + i)(1 - 2i) = 2i \operatorname{Im} z + i^{2021}.$$

2. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \left(\sqrt{e^{2x} - 3e^x} - 3e^x + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2} - \tan \sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{\ln(1 + x^2)}.$$

4. Studiare e tracciare il grafico approssimativo della funzione

$$g(x) = \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right|.$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x}},$$

- i) calcolarne l'integrale indefinito;
ii) dire se è integrabile in senso improprio in $[-2, 0)$, $(0, \frac{1}{2}]$ e $(1, +\infty)$.

Solgimento

1. Posto $z = a + ib$ si ha $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ $|z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$

$$(1+i)(1-2i) = 1+i-2i-2i^2 = 3-i \quad i^{2021} = (i^4)^{505} \cdot i = i$$

L'equazione diventa

$$a^2 - b^2 + 2abi + \sqrt{(a-1)^2 + b^2} - 3 + i = 2bi + 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 3 + \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 0 \\ 2ab = 2b \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} a^2 - b^2 - 3 + \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 0 \\ (a-1)b = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} 1 - b^2 - 3 + \sqrt{b^2} = 0 \\ a = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a^2 - 3 + \sqrt{(a-1)^2} = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} |b^2 - 1| + 2 = 0 \\ a = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a^2 - 3 + |a-1| = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} b = 0 \\ a \geq 1 \\ a^2 + a - 4 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} b = 0 \\ a < 1 \\ a^2 - a - 2 = 0 \end{cases} \quad \Delta < 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} & \text{acc} \\ \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} & \text{acc} \end{cases} \quad a_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 & \text{acc} \\ 2 & \text{non acc} \end{cases}$$

L'equazione ha 2 radici reali $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ e $z_2 = -1$.

2. $\sqrt{e^{2x} - 3e^x} - 3e^x + 1 > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{e^{2x} - 3e^x} > 3e^x - 1$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} e^{2x} - 3e^x \geq 0 \\ 3e^x - 1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3e^x - 1 \geq 0 \\ (\sqrt{e^{2x} - 3e^x})^2 > (3e^x - 1)^2 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} e^x \leq 0 \vee e^x \geq 3 \\ e^x < \frac{1}{3} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} e^x \geq \frac{1}{3} \\ e^{2x} - 3e^x > 9e^{2x} + 1 - 6e^x \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} e^x \leq 0 \\ \emptyset \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} e^x \geq \frac{1}{3} \\ 8e^{2x} - 3e^x + 1 < 0 \end{cases} \quad \Delta = 9 - 32 < 0$$

La funzione non è mai definita.

3. Poiché compare $\sqrt{x}$, la funzione è definita per $x > 0$ e quindi il limite è in realtà un limite destro. Segue che

$$\sqrt{x^3+x^2} = \sqrt{x^2(x+1)} = |x| \sqrt{x+1} = x \sqrt{x+1} \quad \text{Se è, poiché } \ln(1+x^2) \sim x^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+x^2} - (\lg \sqrt{x}) \cdot (\sin \sqrt{x})}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{x+1} - (\lg \sqrt{x}) \cdot (\sin \sqrt{x})}{x^2} \quad \text{Per Taylor}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2)) - (\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} + o(\sqrt{x^5}))(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x^3}}{6} + o(\sqrt{x^5}))}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^2) - (x + \frac{1}{3}\sqrt{x^4} - \frac{1}{6}\sqrt{x^4} - \frac{\sqrt{x^6}}{18} + o(x^{5/2}))}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + (\text{infinitesimi di ordine superiore al secondo de (breve)})}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{x^2} = \frac{1}{3}$$

4. ID: $\left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x + 1 \neq 0 \\ \ln x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1} \\ x \neq e \end{cases} \quad \text{ID} =]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, e[\cup]e, +\infty[$

$$y = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = 1 \vee \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 = \ln x - 1 \quad \emptyset$$

$(1, 0)$ unico pto di intersezione con gli assi $\vee \ln x + 1 = -\ln x + 1 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \lim_{y \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = \ln 1 = 0 \quad \text{A as Vert.}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^{-1}} \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \ln \left| \frac{0}{-1} \right| = -\infty \quad x = e^{-1} \text{ As. Vert.}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \ln \left| \frac{2}{0} \right| = \ln(+\infty) = +\infty \quad x = e \text{ As. Vert.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = \ln 1 = 0 \quad y = 0 \text{ As. ov. a } +\infty$$

Positività: $\left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} < -1 \vee \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x + 1 + \ln x - 1}{\ln x - 1} < 0 \vee \frac{\ln x + 1 - \ln x + 1}{\ln x - 1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x} \frac{\ln x}{\ln x - 1} < 0 \vee \frac{2}{\ln x - 1} > 0 \Leftrightarrow 0 < \ln x < 1 \vee \ln x > 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x} < x < e \vee x > e \quad (\text{insieme in cui la funzione è positiva})$$

$$y' = \frac{1}{\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-2}{x(\ln x - 1)(\ln x + 1)} \quad \text{ID}(y') = \text{ID}(y)$$

N.B. $\text{D } \ln|x| = \frac{1}{x}$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-1} < x < e$$

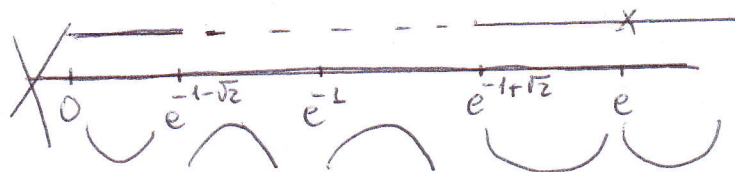
Altri punti di massimo o minimo rel.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \frac{-2}{0^+ (+\infty)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad (\text{per gli ordini})$$

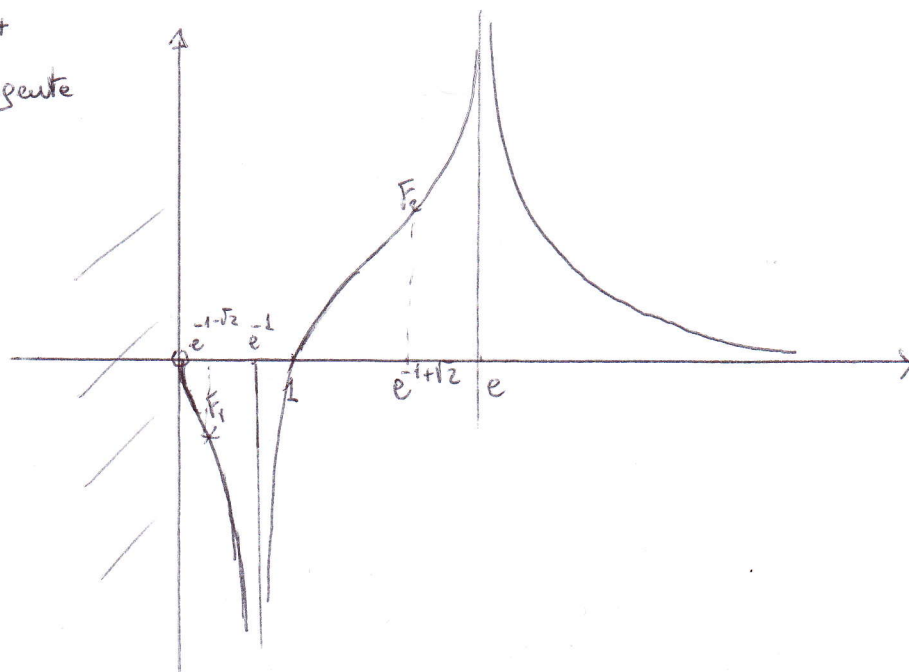
$$y'' = +2 \frac{\ln^2 x - 1 + \cancel{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{x^2 (\ln^2 x - 1)^2} = \frac{2(\ln^2 x + 2 \ln x - 1)}{x^2 (\ln^2 x - 1)^2}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x + 2 \ln x - 1 > 0 \quad \frac{\Delta}{4} = 2 \quad (\ln x)_{\frac{\Delta}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$\ln x < -1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad \ln x > -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x < e^{-1-\sqrt{2}} \quad \vee \quad x > e^{-1+\sqrt{2}}, x \neq e$$



La funzione per $x \rightarrow 0^+$
tende a 0 con tangente
verticale



5. Posto $\sqrt{x^2-x} = x+t \Rightarrow x^2-x = x^2+t^2+2tx \Rightarrow x = -\frac{t^2}{1+2t}$ (4)

$$dx = -\frac{2t(1+2t) - 2t^2}{(1+2t)^2} dt = -\frac{(1+t)2t}{(1+2t)^2} dt$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} dx = \int \frac{-\frac{t^2}{1+2t} + 1}{-\frac{t^2}{1+2t} + t} \cdot \frac{-2(1+t)t}{(1+2t)^2} dt = -2 \int \frac{-t^2+2t+1}{-t^2+t+2t^2} \cdot \frac{t+t^2}{(1+2t)^2} dt$$

$$= +2 \int \frac{t^2-2t-1}{t^2+t} \cdot \frac{t^2+t}{(2t+1)^2} dt = 2 \int \frac{t^2-2t+1}{4t^2+4t+1} dt$$

$$\frac{t^2-2t+1}{t^2+t+\frac{1}{4}} \quad \frac{4t^2+4t+1}{1/4}$$

$$= 2 \int \left(\frac{1}{4} - \frac{3t+\frac{5}{4}}{(2t+1)^2} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{4} - \frac{3/2}{2t+1} - \frac{d}{dt} \frac{1/4}{2t+1} \right) dt = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \ln|2t+1| - \frac{1}{4} \frac{1}{2t+1} + C$$

perché

$$\frac{3t+\frac{5}{4}}{(2t+1)^2} = \frac{A}{2t+1} + \frac{d}{dt} \frac{B}{2t+1} = \frac{A}{2t+1} - \frac{2B}{(2t+1)^2} = \frac{2At+A-2B}{(2t+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2-x} - x) - \frac{3}{2} \ln|2\sqrt{-x+1}| - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{-x+1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A-2B=3 \\ A-2B=\frac{5}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}-2B=\frac{5}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=\frac{1}{8} \end{cases}$$

ii) la funzione $h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}}$ è definita per $x < 0$ o $x > 1$.

In $[-2, 0)$

h è continua, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{\sqrt{x(x-1)}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ con ord $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

h è integrabile in s.c. in $[-2, 0)$.

In $(0, \frac{1}{2}]$ la funzione non è definita e quindi non è integrabile in s.c.

In $(1, +\infty)$

h è continua, $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty$ con ord $\frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$h(x)$ non è integrabile in s.c. in $(1, +\infty]$