

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

16 febbraio 2024

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^4 + iz + z \cdot \bar{z} = |z|^2 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} + (\cos \pi + i \sin \pi)^3$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \left(\frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2-x}}}{\ln^2 x^2 - 2 \ln |x|} \right)^\pi.$$

3. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2 \ln x) \ln^2 x}{(x-1)^\alpha} & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

4. Data

$$g(x) = -x e^{\frac{1}{\ln x}},$$

i) studiare la funzione e disegnarne il grafico approssimativo;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso improprio in $]0, 1[$, in $]1, 2]$ e in $[3, +\infty[$.

5. Calcolare

$$\int \frac{\cos(2 \ln x) \ln^2 x}{x} dx$$

(si consiglia la sostituzione $t = \ln x$).

Sudgimento

1. Poiché $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ e $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} = \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^{100} = \left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)^{100} = (-i)^{100} = ((-i)^4)^{25} = 1$,
 $(\cos \pi + i \sin \pi)^3 = \cos 3\pi + i \sin 3\pi = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, l'equazione diventa
 $z^4 + iz = 0 \Leftrightarrow z(z^3 + i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 + i = 0$ cioè $z = \sqrt[3]{-i}$

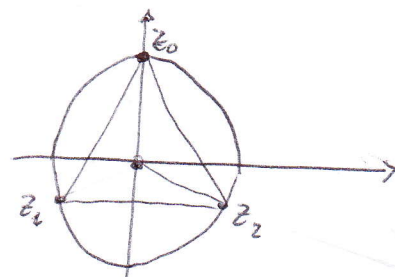
$$z = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi} = \left\{ \cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Per $k=0$: $z_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i = i$

Per $k=1$: $z_1 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Per $k=2$: $z_2 = \cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

L'equazione ha 4 radici



2. $\frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2-x}}}{\ln^2 x^2 - 2 \ln |x|} \geq 0$

Studio il C.E. delle frazioni e poi applico la regola del segno.

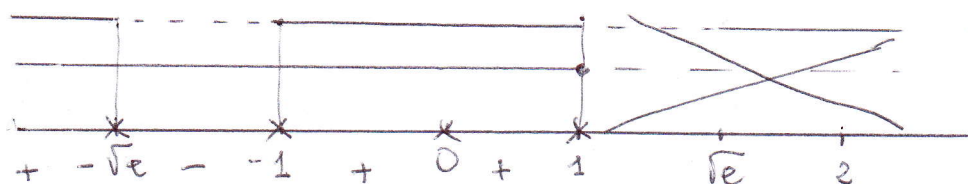
$$\begin{cases} -1 \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} \leq 1 \\ x^2 \neq 0 \\ |x| \neq 0 \\ \ln^2 x^2 - 2 \ln |x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ 1 \leq \sqrt{2-x} \\ x \neq 0 \\ (2 \ln |x|)^2 - 2 \ln |x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 1 \leq 2-x \\ x \neq 0 \\ 4 \ln |x| - 2 \ln |x| \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ \ln |x| \neq 0 \wedge \ln |x| \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \wedge |x| \neq \sqrt{e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq 0, \pm 1, \pm \sqrt{e} \end{cases}$$

$N > 0$ $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2-x}} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2-x} \Rightarrow x \leq 1$

$D > 0$ $\frac{4 \ln^2 |x| - 2 \ln |x|}{2} > 0 \Leftrightarrow \ln |x| < 0 \vee \ln |x| > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < |x| < 1 \vee |x| > \sqrt{e} \Leftrightarrow -1 < x < 1 \text{ con } x \neq 0 \vee x < -\sqrt{e} \vee x > \sqrt{e}$



$D = (-\infty, -\sqrt{e}[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[$
 $I = -1, 0[\cup]0, 1[$

$N > 0$

3. f è continua $\forall x \neq 1$ perché somma, rapporto, composta di funzioni continue. Verifico se è continua nel punto $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x-1} = 0$$

x Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos(2 \ln x) \ln^2 x}{(x-1)^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

$$\left(\text{perché } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln^2 x}{(x-1)^\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(1+y)}{y^\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2}{y^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases} \right)$$

$x-1=y$ $\ln(1+y) \sim y$ se $y \rightarrow 0$

Conclusioni: se $\alpha = 2$ f continua anche nel pt. 1 $\Rightarrow f$ continua
 se $\alpha < 2$ f ha discontinuità di I^a specie in $x=1$
 se $\alpha > 2$ f ha discontinuità di II^a specie in $x=1$.

4. $g(x) = -x e^{\frac{1}{\ln x}}$

ID: $\begin{cases} \ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$

ID = $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$y=0 \Leftrightarrow x=0$ non accet. $\nexists$ intersezione con gli assi

$y > 0 \Leftrightarrow -x e^{\frac{1}{\ln x}} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ non acc. g è sempre negativa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -x e^{\frac{1}{\ln x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

g prolungabile per continuità in $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -x e^{\frac{1}{\ln x}} = -1 e^{\frac{1}{0^-}} = -e^{-\infty} = 0$$

g prolung. per cont. a sinistra in $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} -x e^{\frac{1}{\ln x}} = -1 \cdot e^{\frac{1}{0^+}} = -e^{+\infty} = -\infty$$

$x=+1$ A.V. a sinistra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \cdot e^{\frac{1}{\ln x}} = -\infty \cdot e^0 = -\infty$$

$\nexists$ as. orizz. a $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x \cdot e^{\frac{1}{\ln x}}}{x} = -e^0 = -1$$

(eventuale coeff. ang. as. obliquo)

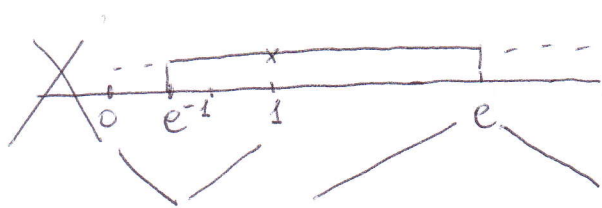
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{\frac{1}{\ln x}} + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x (e^{\frac{1}{\ln x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{\ln x}} - 1}{\frac{1}{\ln x}} = -\infty \quad (3)$$

(perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\ln x} = -\infty$ per gli ordini $\neq$ es. ob a + ∞)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{\ln x}} - 1}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{y = \frac{1}{\ln x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$y' = -e^{\frac{1}{\ln x}} - x \cdot e^{\frac{1}{\ln x}} \cdot \left(-\frac{1}{x \ln^2 x}\right) = e^{\frac{1}{\ln x}} \left(\frac{1 - \ln^2 x}{\ln^2 x}\right) \quad \text{ID}(y') = \text{ID}(y)$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln^2 x > 0 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e \wedge x \neq 1$$



$$m \begin{cases} x = e^{-1} \\ y = -\frac{1}{e} \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e^2} \end{cases} \quad M \begin{cases} x = e \\ y = -e^2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - 1\right) = e^0 (0 - 1) = -1$$

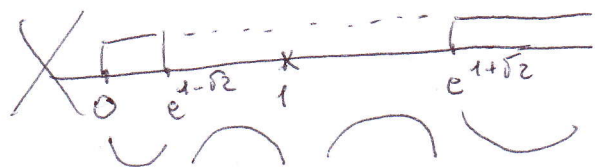
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{\ln x}} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - 1\right) = e^{-\infty} \left(\frac{1}{0^+} - 1\right) = 0 \cdot \infty = 0 \text{ per gli ordini}$$

$$y'' = D \left[e^{\frac{1}{\ln x}} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - 1\right) \right] = e^{\frac{1}{\ln x}} \left(-\frac{1}{x \ln^2 x}\right) + e^{\frac{1}{\ln x}} \left(-\frac{2 \ln x}{x \ln^3 x}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \ln^2 x} \left(-\frac{1}{\ln x} + 1 - \frac{2}{\ln x}\right) = \frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \ln^2 x} \left(\frac{\ln^2 x - 2 \ln x - 1}{\ln^2 x}\right)$$

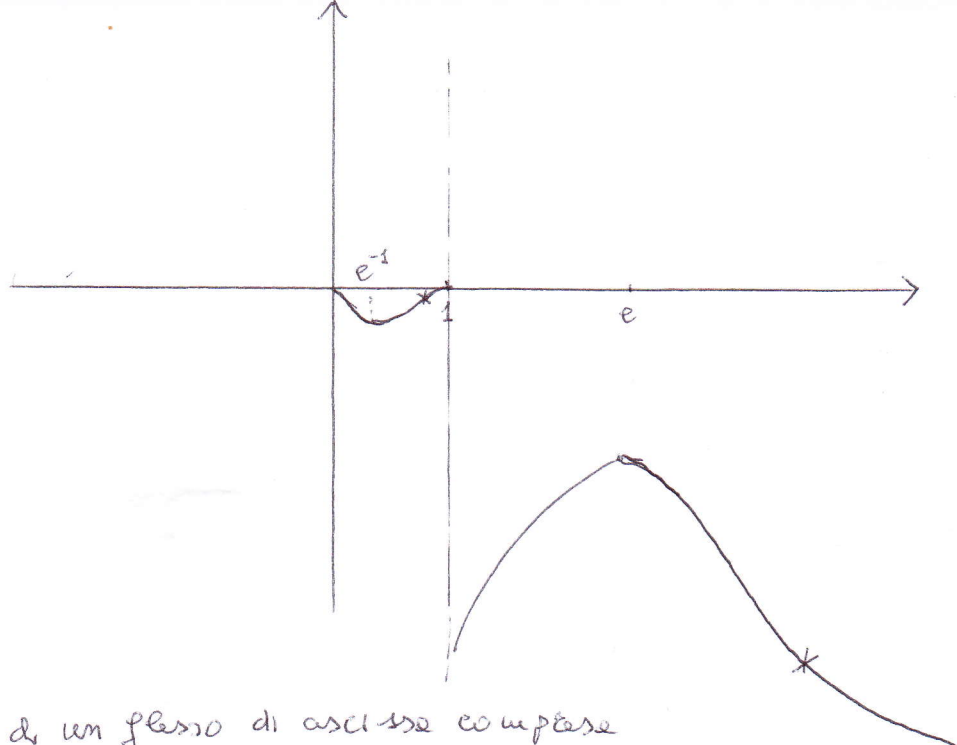
$$y'' > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 2 \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 - \sqrt{2} \vee \ln x > 1 + \sqrt{2}$$

$$0 < x < e^{1-\sqrt{2}} \vee x > e^{1+\sqrt{2}}$$



flessa in $]0, e^{1-\sqrt{2}}[$ e $]e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$

La funzione ha 2 flessi
di ascisse $x_1 = e^{1-\sqrt{2}}$ e $x_2 = e^{1+\sqrt{2}}$



N.B. La presenza di un flesso di ascisse comprese

tra 0 e 1, anzi tra e^{-1} e 1, si può dedurre anche dal

fatto che $\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = 0$ e quindi il grafico ha tangente orizz. per $x \rightarrow 1^-$.

$$5. \int \frac{\cos(2 \ln x) \ln^2 x}{x} dx = \int_{-1}^2 t^2 \cos(2t) dt$$

$$\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

$$= \int t^2 D\left(\frac{1}{2} \sin 2t\right) dt = \frac{1}{2} t^2 \sin 2t - \int 2t \cdot \frac{1}{2} \sin 2t dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \sin 2t - \int t D\left(-\frac{1}{2} \cos 2t\right) dt = \frac{1}{2} t^2 \sin 2t + \frac{1}{2} (t \cos 2t - \int \cos 2t dt)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \sin 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t + C$$

$$= \frac{1}{2} (\ln^2 x) \sin(2 \ln x) + \frac{1}{2} (\ln x) \cos(2 \ln x) - \frac{1}{4} \sin(2 \ln x) + C$$