

Corso di laurea in Chimica

Esame - Esonero di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

31 gennaio 2024

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^6 = \left((2 + 5i)(1 - i) - 8 + \sqrt{3} + i^{2024} \right)^3$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \left(\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1} + 2}{4^{x-1} - 2^{x+1} + 3} \right)^\pi.$$

3. Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(e - (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)$$

sapendo che è definita in $D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

4. Data

$$g(x) = \ln |x^2 - 5x + 4| - 2 \ln |x|,$$

- i) studiare la funzione e disegnarne il grafico approssimativo;
- ii) calcolarne l'integrale indefinito;
- ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso improprio in $]0, 1[$ e in $]4, +\infty[$.

N.B. Chi ha superato il primo esonero deve fare solo gli esercizi 3. e 4.

Solgimento

1. Poiché $(2+5i)(1-i) = 2 - 2i + 5i - 5i^2 = 7 + 3i$ e $i^{2024} = (i^4)^{506} = 1$

l'equazione diventa $z^6 = (7+3i - 8 + \sqrt{3} - 1)^3$ cioè $z^6 = (\sqrt{3} + 3i)^3$

Calcolo modulo e argomento di $\sqrt{3} + 3i$: $\rho = \sqrt{3+9} = \sqrt{12}$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

quindi $(\sqrt{3} + 3i)^3 = (\sqrt{12})^3 (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^3 = \sqrt{12}^3 (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

$$z^6 = \sqrt{12}^3 (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \Rightarrow z = \sqrt[6]{(\sqrt{12})^3} (\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6}) \quad | k \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

L'equazione ha perciò 6 radici complesse:

$$z_0 = \sqrt[6]{12} (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = \sqrt[6]{12} (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$$

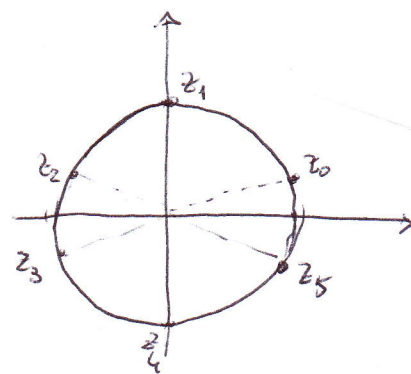
$$z_1 = \sqrt[6]{12} (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = i \sqrt[6]{12}$$

$$z_2 = \sqrt[6]{12} (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = \sqrt[6]{12} (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{12} (\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) = -z_0$$

$$z_4 = \sqrt[6]{12} (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = -i \sqrt[6]{12} = -z_1$$

$$z_5 = \sqrt[6]{12} (\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}) = \sqrt[6]{12} (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -z_2$$



che sono nel piano complesso i vertici di un esagono regolare inserito nella circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt[6]{12}$.

2. Poiché la funzione potenza con esponente irrazionale positivo è definita quando l'argomento è ≥ 0 , studiamo

$$\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1} + 2}{4^{x-1} - 2^{x+1} + 3} \geq 0$$

Applichiamo la regola del segno nel dominio della frazione, cioè per $x+1 \geq 0$

$N \geq 0$ $\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1} + 2 \geq 0$ Porro $\sqrt[4]{x+1} = t$ allora

$$t - t^2 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 \leq 0 \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

$$-1 \leq \sqrt[4]{x+1} \leq 2$$

$$\sqrt[4]{x+1} \geq -1$$

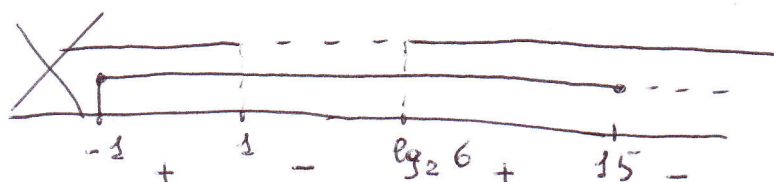
$$\sqrt[4]{x+1} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 2^4 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 15$$

$D > 0$ $4^{x-1} - 2^{x+1} + 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 3 > 0$

Poiché $2^x = t$ si ha $t^2 - 8t + 12 > 0$ $t_2 = 4 \pm 2 = \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$ $2 < t & t > 6$ (2)

$$\Leftrightarrow 2^x < 2 \vee 2^x > 6 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > \log_2 6$$



$$D = [-1, 1[\cup]\log_2 6, 15]$$

3. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x} (e - (1+x)^{\frac{1}{x}}) = -1(e - \infty) = +\infty$ (poiché $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = (0^+)^{-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$)
 $\Rightarrow x = -1$ As. asintoto verticale

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e - (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \frac{e-e}{0} = \frac{0}{0}$ f.i. (poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e - e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{e}{x} (e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{e}{x} \left(\frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} \right) \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} = -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} \cdot \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} = -\frac{e}{2}$$

poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$
 $y = \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Non c'è asintoto verticale per $x = 0$, ma la funzione è prolungabile per continuità per $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (e - (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (e - e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}) = \frac{1}{+\infty} (e - e^0) = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ As. obb. a $+\infty$ (N.B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ per ordini)

4. i) $g(x) = \ln|x^2 - 5x + 4| - 2\ln|x| = \ln|x^2 - 5x + 4| - \ln x^2 = \ln \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right|$

$$ID \begin{cases} |x^2 - 5x + 4| > 0 \\ |x| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1, 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad ID = \mathbb{R} - \{0, 1, 4\}$$

Poiché il dominio non è simmetrico rispetto a 0, g non è né pari né dispari. (3)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = x^2 \vee x^2 - 5x + 4 = -x^2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \vee 2x^2 - 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

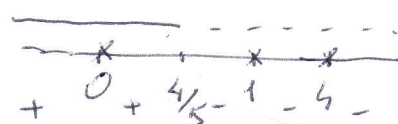
$(\frac{4}{5}, 0)$ unica intersezione del grafico di g con asse x

$\Delta < 0 \nexists$

∅ intersezione del grafico di g con asse y poiché $0 \notin \text{ID}(g)$.

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} > 1 \vee \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} < -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 > x^2 \\ x \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < -x^2 \\ \nexists \text{ poiché } \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x \neq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln |x^2 - 5x + 4| - 2 \ln |x| = \ln 4 - (-\infty) = +\infty \quad x = 0 \text{ A.V. completo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln |x^2 - 5x + 4| - 2 \ln |x| = -\infty - 0 = -\infty \quad x = 1 \text{ A.V. completo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \ln |x^2 - 5x + 4| - 2 \ln |x| = -\infty - 2 \ln 4 = -\infty \quad x = 4 \text{ A.V. completo}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \ln \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 1 = 0 \quad y = 0 \text{ A. or. a } \pm \infty$$

$$y' = D \left(\ln \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| \right) = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 4} \cdot \frac{(2x - 5)x^2 - 2x(x^2 - 5x + 4)}{x^4} = \frac{5x^2 - 8x}{x^2(x^2 - 5x + 4)} = \frac{5x - 8}{x(x^2 - 5x + 4)}$$

$D \ln |y| = \frac{1}{y}$

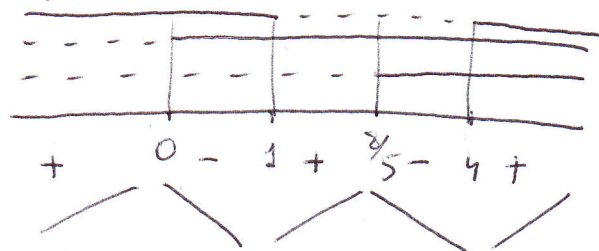
$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{5x - 8}{x(x^2 - 5x + 4)} > 0 \Leftrightarrow (5x - 8)x(x^2 - 5x + 4) > 0$$

$$5x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{8}{5}$$

$$x > 0$$

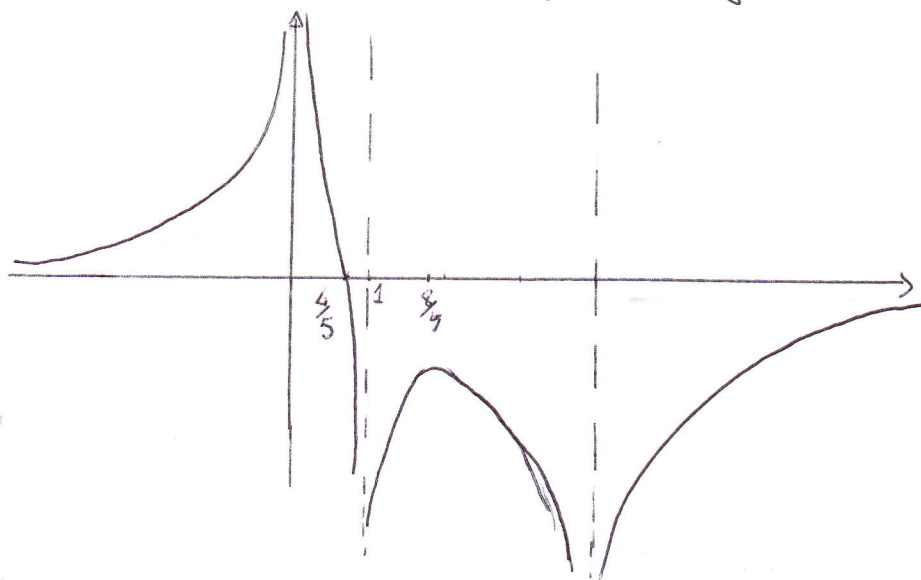
$$x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 4$$

$$\mathcal{H} \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = f(\frac{8}{5}) \end{cases}$$



$$y'' = D \left(\frac{5x - 8}{x^3 - 5x^2 + 4x} \right) = \frac{5(x^3 - 5x^2 + 4x) - (5x - 8)(3x^2 - 10x + 4)}{(x^3 - 5x^2 + 4x)^2} = \frac{-10x^3 + 49x^2 - 80x + 32}{(x^3 - 5x^2 + 4x)^2}$$

$y'' > 0 \Leftrightarrow -10x^3 + 49x^2 - 80x + 32 > 0$ Non riescono a trovare radici di questa equazione di 3° grado, che ha sicuramente una radice reale che si trova tra 0 e 1 perché g ha un flesso tra 0 e 1.



$$\begin{aligned} \text{ii) } \int \ln \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| dx &= x \ln \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| - \int x \frac{x^2}{x^2 - 5x + 4} \cdot \frac{(2x - 5)x^2 - 2x(x^2 - 5x + 4)}{x^4} dx \\ &= x \ln \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} \right| - \ln |x - 1| - 4 \ln |x - 4| + C \end{aligned}$$

poiché

$$\int \frac{5x - 8}{x^2 - 5x + 4} dx = \int \left(\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 4} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{4}{x - 4} \right) dx = \ln |x - 1| + 4 \ln |x - 4| + C$$

$$A(x - 4) + B(x - 1) = 5x - 8 \Rightarrow \text{per } x = 1 \quad -3A = -3 \Rightarrow A = 1$$

$$\text{per } x = 4 \quad 3B = 12 \Rightarrow B = 4$$

ii) Poiché g è continua in $]0, 1[$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= -\infty \quad \text{con ord piccolo sicuramente } \leq x < 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= -\infty \quad \text{"} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow g \text{ è integrabile s.i. in }]0, 1[$$

Poiché g è continua in $]4, +\infty)$, studio $\int_4^{+\infty} g(x) dx = \int_4^5 g(x) dx + \int_5^{+\infty} g(x) dx$.

Il 1° integrale converge perché $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = -\infty$ con ord $\leq x < 1$, il secondo invece diverge negativamente perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{con ord } 1 \quad \text{essendo } g(x) = \ln \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \sim -\frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} \sim -\frac{5}{x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

dove $-\frac{5}{x} \rightarrow 0$ con ord 1 per $x \rightarrow +\infty$.