

Corso di laurea in Chimica
Esonero di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

12 dicembre 2023

1. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_x \left| \log_{\frac{1}{3}} |x - 4| \right|}.$$

2. Risolvere la seguente equazione

$$z^6 + \frac{2}{i}z^3 + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^8$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x) \left(\sin \frac{1}{x} \right) \log_2(1+x)}{\sqrt{1 - \cos x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + \sin x}{\sqrt{2 - \cos x}}.$$

4. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la continuità della funzione

$$g(x) = \begin{cases} (e^x - 1) \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\arcsin x}{x^\alpha} & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

5. Scrivere, se possibile, l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$h(x) = (\sin x)^{x^2}$$

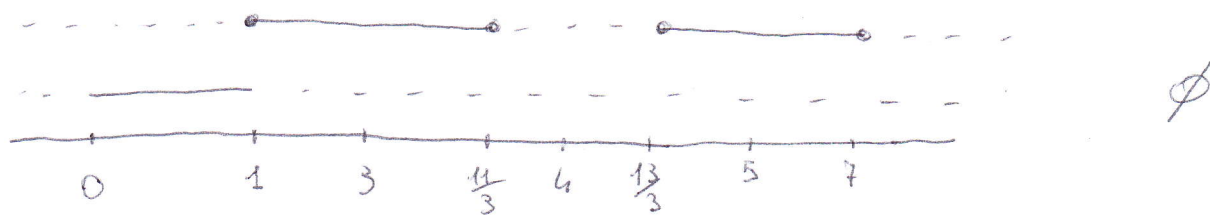
nel punto di ascissa $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Esame

$$1. \log_x |\log_{\frac{1}{3}} |x-4|| \geq 0 \Leftrightarrow (I) \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < |\log_{\frac{1}{3}} |x-4|| \leq 1 \end{cases} \vee (II) \begin{cases} x > 1 \\ |\log_{\frac{1}{3}} |x-4|| \geq 1 \end{cases}$$

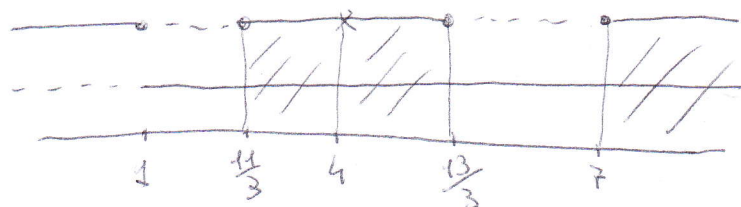
$$(I) \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} |x-4| > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} |x-4| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} |x-4| \neq 0 \\ -1 \leq \log_{\frac{1}{3}} |x-4| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ |x-4| \neq 1 \wedge |x-4| \neq 0 \\ \frac{1}{3} \leq |x-4| \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x-4 \neq \pm 1 \wedge x \neq 4 \\ \frac{1}{3} \leq x-4 \leq 3 \vee -3 \leq x-4 \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \neq 3, 4, 5 \\ \frac{13}{7} \leq x \leq 7 \vee 1 \leq x \leq \frac{11}{3} \end{cases}$$



$$II) \begin{cases} x > 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} |x-4| \leq -1 \vee \log_{\frac{1}{3}} |x-4| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ |x-4| \geq 3 \vee 0 < |x-4| \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x-4 \leq -3 \vee x-4 \geq 3 \vee -\frac{1}{3} \leq x-4 \leq \frac{1}{3} \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 1 \vee x \geq 7 \vee \frac{11}{3} \leq x < 4 \vee 4 < x \leq \frac{13}{3} \end{cases}$$



$$ID = [\frac{11}{3}, 4[\cup]4, \frac{13}{3}] \cup [7, +\infty)$$

$$2. \text{ Poiché } \frac{z}{i} = \frac{2i}{i^2} = -2i \text{ e}$$

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^8 = \frac{\cos \pi + i \sin \pi}{\cos 2\pi + i \sin 2\pi} = \frac{-1 + 0}{1 + 0} = -1$$

l'equazione diventa

$$z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$$

Posto $z^3 = t$ si ha $t^2 - 2it - 1 = 0$

$$t_{1/2} = i \pm \sqrt{i^2 + 1} = i \pm 0 = i \quad (2 \text{ radici coincidenti})$$

$$z^3 = i \Rightarrow z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}$$

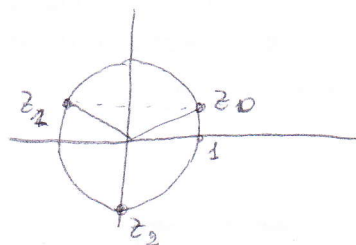
$$= \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\},$$

cioè l'equazione ha tre soluzioni (di molteplicità 2) date da

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$



$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x) \left(\sin \frac{1}{x} \right) \lg_2(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x} \right) \cdot \lg_2(1+x)}{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x} \right) \cdot \lg_2(1+x)}{\pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}} = 0$$

perché $\sin \frac{1}{x}$ non ha limite per $x \rightarrow 0$ ma è una quantità limitata

$$\begin{array}{c} \nearrow 1 \quad \nearrow 0 \\ \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x} \right) \cdot \lg_2(1+x) \\ \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} \\ \downarrow \\ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

dove si è sfruttato il fatto che il prodotto di una funzione limitata per una che tende a 0 tende ancora a 0.

4. La funzione è continua per $x > 0$ e $-1 \leq x < 0$ perché prodotto o rapporto di funzioni continue. Studiamo la continuità in $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \ln x = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_1 \cdot \underbrace{x \ln x}_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arcsin x}{(-x)^{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arcsin x}{-x} \cdot \frac{-x}{(-x)^{\alpha}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\arcsin x}{x}}_1 \cdot (-x)^{1-\alpha}$$

in realtà nelle frecce c'è uno

sbaglio di segno perché se $x < 0$

x^{α} non ha senso $\forall x \in \mathbb{R}$! (serve segno -)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ -1 & \alpha = 1 \\ -\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

conclusione:

se $\alpha < 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ cioè $\exists \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$

$\Leftrightarrow g$ è continua in 0

se $\alpha = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ g ha discontinuità di I^a specie in 0

se $\alpha > 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ g ha discontinuità di II^a specie

5. l'equazione delle rette tangente al grafico di L nel ptto di ascissa x_0 è

$$y - L(x_0) = L'(x_0)(x - x_0)$$

Nel nostro caso $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $h(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$h'(x) = D(e^{x^2 \ln \sec x}) = e^{x^2 \ln \sec x} \left(2x \ln \sec x + x^2 \frac{\sec x}{\sec x} \right) \\ = (\sec x)^{x^2} \left(2x \ln \sec x + x^2 \frac{\sec x}{\sec x} \right).$$

Segue che $h'(\frac{\pi}{2}) = 1 \left(\pi \ln 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 0 \right) = 0$ e quindi la tangente

ha equazione $y = 1$.