

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

12 dicembre 2023

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^6 + \frac{2}{i}z^3 + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^8$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_x \left| \log_{\frac{1}{3}} |x - 4| \right|}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x) \left(\sin \frac{1}{x} \right) \log_2(1+x)}{\sqrt{1 - \cos x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + \sin x}{\sqrt{2 - \cos x}}.$$

4. Studiare e tracciare il grafico approssimativo della funzione

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{|x-1|}}.$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{x-1}},$$

i) calcolarne l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$ e, se possibile, calcolare $\int_1^{+\infty} h(x) dx$.

Svolgimento

1. Polele $\frac{2}{i} = \frac{2i}{i^2} = -2i$ e

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^8 = \frac{\cos \pi + i \sin \pi}{\cos 2\pi + i \sin 2\pi} = \frac{-1 + 0}{1 + 0} = -1, \text{ l'equazione diventa}$$

$$z^6 - 2iz^3 - 1 = 0 \quad \text{Ponendo } z^3 = t \text{ si ha } t^2 - 2it - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = i \pm \sqrt{i^2 + 1} = i \pm 0 = i \quad (2 \text{ radici coincidenti})$$

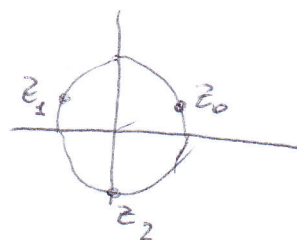
$$z^3 = i \Rightarrow z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

cioè l'equazione ha tre soluzioni (di modulo pari a 2) date da

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

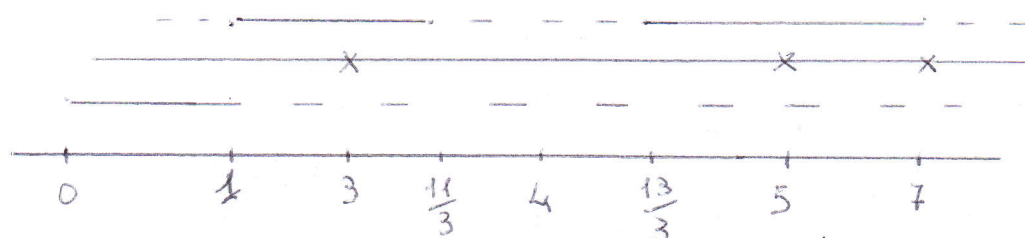
$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$



2. $\log_x | \log_{1/3} |x-4| | \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & 0 < x < 1 \\ & 0 < \log_{1/3} |x-4| \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \text{II} & x > 1 \\ & | \log_{1/3} |x-4| | \geq 1 \end{cases}$

$$\text{(I)} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ | \log_{1/3} |x-4| | \neq 0 \\ | \log_{1/3} |x-4| | \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_{1/3} |x-4| \neq 0 \\ -1 \leq \log_{1/3} |x-4| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ |x-4| \neq 1 \wedge |x-4| > 0 \\ \frac{1}{3} \leq |x-4| \leq 3 \end{cases}$$

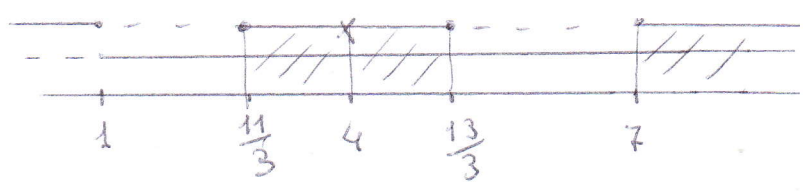
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x-4 \neq \pm 1 \wedge x \neq 4 \\ \frac{1}{3} \leq x-4 \leq 3 \vee -3 \leq x-4 \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \neq 3, x \neq 5, x \neq 4 \\ \frac{13}{3} \leq x \leq 7 \vee 1 \leq x \leq \frac{11}{3} \end{cases}$$



$$(\text{II}) \quad \begin{cases} x > 1 \\ \lg_{\frac{1}{3}} |x-4| \leq -1 \vee \lg_{\frac{1}{3}} |x-4| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ |x-4| \geq 3 \vee 0 < |x-4| \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-4 \leq -3 \vee x-4 \geq 3 \vee \left(-\frac{1}{3} \leq x-4 \leq \frac{1}{3} \wedge x \neq 4\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 1 \vee x \geq 7 \vee \frac{11}{3} \leq x < 4 \vee 4 < x \leq \frac{13}{3} \end{cases}$$



$$ID = \left[\frac{11}{3}, 4\right[\cup]4, \frac{13}{3}] \cup [7, +\infty)$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x) \left(\sin \frac{1}{x}\right) \lg_2(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$ perché $\sin \frac{1}{x}$ non ha limite per $x \rightarrow 0$ ma è una quantità limitata

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right) \lg_2(1+x)}{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_1 \cdot \underbrace{\left(\sin \frac{1}{x}\right) \cdot \lg_2(1+x)}_{\rightarrow 0} = 0$$

(si ricorda che il prodotto di una funzione limitata per una che tende a 0 tende ancora a 0)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + \sin x}{\sqrt{2-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}} \cdot x^2 = +\infty$$

(trascuro $-x$ rispetto a x^2 e $\sin x$ perché limitata)

$$\text{perché } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 2-1 \leq 2-\cos x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{2-\cos x} \leq \sqrt{3}$$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}} \leq 1$ e il prodotto di una funzione che tende a $+\infty$ per una limitata "discosta" da 0 tende a ∞ con regola segno.

4. ID: $e^{|x-1|} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow ID = \mathbb{R}$

(3)

$f(-x) = \frac{x^2+1}{e^{|x-1|}} = \frac{x^2+1}{e^{|x+1|}} \neq \pm f(x)$ f non è né pari né dispari

$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{e} \end{cases} (0, \frac{1}{e}) \quad \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2+1}{e^{|x-1|}} = 0 \Rightarrow x^2+1=0 \end{cases} \emptyset$ $\nexists$ inters. con asse x

$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^{|x-1|}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ perché $x^2+1 > 0 \quad \forall x$
 $e^{|x-1|} > 0 \quad \forall x$

$\nexists$ asintoti verticali poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}$

lim $\frac{x^2+1}{e^{|x-1|}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$ perché ord $e^{|x-1|} > \text{ord } x^2 \Rightarrow y=0$ A. ord $x \rightarrow \pm \infty$

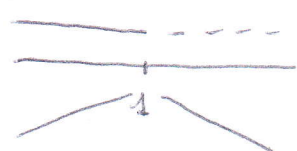
$y' = \frac{2x e^{|x-1|} + (x^2+1) e^{|x-1|} \cdot \frac{x-1}{|x-1|}}{e^{2|x-1|}} = \frac{e^{|x-1|}}{e^{2|x-1|}} \cdot (2x + (x^2+1) \frac{x-1}{|x-1|}) \quad \forall x \neq 1$

$\Rightarrow y' = \begin{cases} \frac{2x+x^2+1}{e^{x-1}} = \frac{(x+1)^2}{e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2x-x^2-1}{e^{-x+1}} = -\frac{(x-1)^2}{e^{1-x}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

lim $y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)^2}{e^{x-1}} = 2$
 lim $y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{(x-1)^2}{e^{1-x}} = 0$

Poiché $y'_+(1) = 0$ e $y'_-(1) = 2$, $x=1$ pto angoloso

$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \frac{(x+1)^2}{e^{x-1}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{e^{1-x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$

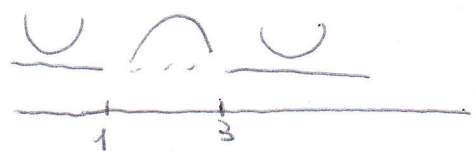


La funzione cresce stz. per $x < 1$

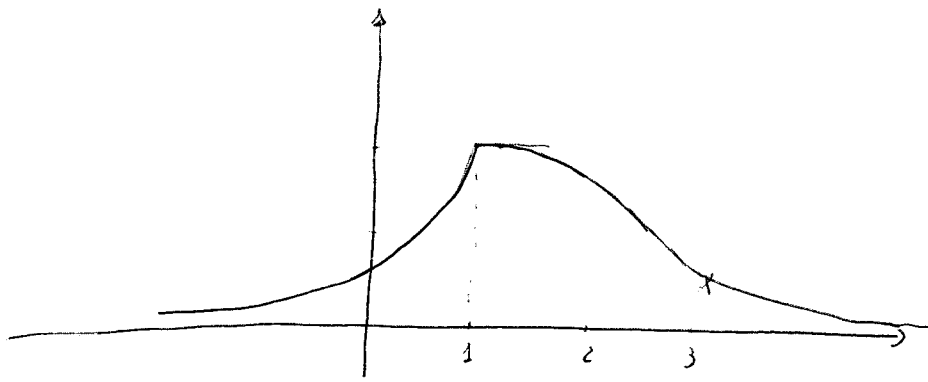
decrece stz. per $x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ Mass. rel

$y'' = \begin{cases} \frac{2(x+1)e^{x-1} - (x+1)^2 e^{x-1}}{e^{2(x-1)}} = \frac{(x+1)(2-x-1)}{e^{x-1}} = \frac{(x+1)(1-x)}{e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ -\frac{2(x-1)e^{1-x} + (x-1)^2 e^{1-x}}{e^{2(1-x)}} = \frac{(x-1)(-2+x-1)}{e^{1-x}} = \frac{(x-1)(x-3)}{e^{1-x}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ (x+1)(1-x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)(x-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$



$\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{10}{e^2} \end{cases}$ fless.



5) i) $\int \frac{x^2+1}{e^{x-1}} dx = \int \frac{x^2+1}{e^x \cdot e^{-1}} dx = e \int (x^2+1) e^{-x} dx = e \int (x^2+1) D(-e^{-x}) dx$

integro per parti $= e \left[(x^2+1)(-e^{-x}) + \int e^{-x}(2x) dx \right] = e \left[-(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx) \right]$

$$= e \left[-(x^2+1)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} \right] + c = -e \cdot e^{-x} (x^2 + 2x + 3) + c.$$

ii) La funzione $f(x)$ è continua in $[1, +\infty)$ e

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{e^{x-1}} = 0$ con ordine comunque grande e quindi > 1
(essendo e^{x-1} infinito di ord. com. grande)

quindi è integrabile in s.i. in $[1, +\infty)$ e

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{e^{x-1}} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{x^2+1}{e^{x-1}} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-e^{1-x} (x^2 + 2x + 3) \right]_1^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-e^{1-y} (y^2 + 2y + 3) + 6 \right] = 6.$$

$\downarrow \quad \swarrow$
 $0 \cdot (+\infty) = 0$ per gli ordini