

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

13 novembre 2023

1. Risolvere la seguente equazione

$$z|z|^2 + z^3 = 2(i)^{160} - \left(\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}} \right)^{15}$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{\lg_{\frac{1}{2}}(\sqrt{|1-x^2|} - x)}{9^x - (\sqrt{3})^{x+1}}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x) \sqrt{x-1} + \sin^2(x-1)}{(x-1)^\alpha}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x) \sqrt{x-1} + \sin^2(x-1)}{(x-1)^\alpha}.$$

4. Studiare e tracciare il grafico approssimativo della funzione

$$g(x) = xe^{-\frac{2}{x}}.$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}}},$$

- i) calcolarne l'integrale indefinito;
- ii) dire se è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$, in $[1, +\infty)$ e in $]0, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $(i)^{160} = (i^4)^{40} = 1^{40} = 1$,

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}} \right)^{15} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} \right) 15 + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} \right) 15}{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

L'equazione diventa $z|z|^2 + z^3 = z - 1$. Posto $z = a + ib$ si ha

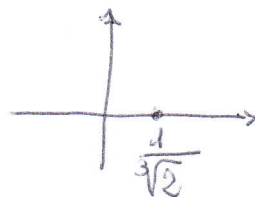
$$(a+ib)(a^2+b^2) + (a+ib)^3 = 1 \Leftrightarrow a(a^2+b^2) + b(a^2+b^2)i + a^3 + 3a^2b i - 3ab^2 - ib^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + ab^2 + a^3 + 3a^2b^2 = 1 \\ a^2b + b^3 + 3a^2b - b^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3 - 2ab^2 = 1 \\ 4a^2b = 0 \end{cases} \quad -ib^3 = 1$$

$$\begin{cases} 0 \neq 1 \\ a = 0 \\ \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} 2a^3 = 1 \\ b = 0 \\ a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

L'equazione ha una sola soluzione

$$z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$



2. $\begin{cases} \sqrt{1-x^2} - x > 0 \\ 9^x - (\sqrt{3})^{x+1} \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} > x \\ 3^{2x} \neq 3^{\frac{x+1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2x \neq \frac{x+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

perché $\sqrt{1-x^2} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ |1-x|^2 \geq 0 \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 > x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 < -x^2 \vee 1-x^2 > x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x < 0 \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Conclusione: $D = (-\infty, \frac{1}{3} \cup]\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2} [$

3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln x) \sqrt{x-1} + \sin^2(x-1)}{(x-1)^\alpha} = \lim_{x-1=y} \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y \ln(1+y) + \sin^2 y}{y^\alpha}}{y^\alpha} =$ poiché $\ln(1+y) \sim y$ e $\sin y \sim y$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{3/2} + y^2}{y^\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{3/2}}{y^\alpha} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ +\infty \end{cases}$$

Trascurto in confronto più veloce

$$\alpha < \frac{3}{2}$$

$$\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\alpha > \frac{3}{2}$$

N.B. Se il limite si può calcolare solo per $x \rightarrow 1^+$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x) \sqrt{x-1} + \sin^2(x-1)}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x) \sqrt{x-1}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} +\infty & \alpha \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$

Ricordo $\sin^2(x-1)$ quant'è limitata rispetto a $(\ln x) \sqrt{x-1} \rightarrow +\infty$ osservo che

$\begin{cases} \text{ord}((\ln x) \sqrt{x-1}) > \frac{1}{2} \\ \text{ord}((\ln x) \sqrt{x-1}) < \frac{1}{2} + \epsilon \end{cases} \quad \forall \epsilon > 0$

4. $g(x) = x e^{-\frac{2}{x}}$ $ID = \mathbb{R}^*$

$g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ non acc.
 $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Asintoti:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{2}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-\frac{2}{x}} = 0 \cdot (+\infty) = -\infty$ per gli ordini

$x = 0$ asintoto verticale destro

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-\frac{2}{x}} = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty$ $\nexists$ as. orizz. $a \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{2}{x}} = 1$ (eventuale coefficiente angolare di asob.)

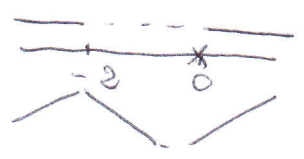
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-\frac{2}{x}} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-2y} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-2y} - 1}{-2y} \cdot (-2) = -2$

$y = x - 2$ as. obliquo $a \pm\infty$

$g'(x) = e^{-\frac{2}{x}} + x \cdot e^{-\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^2} = e^{-\frac{2}{x}} \left(1 + \frac{2}{x}\right)$

$ID(g') = ID(g) = \mathbb{R}^*$

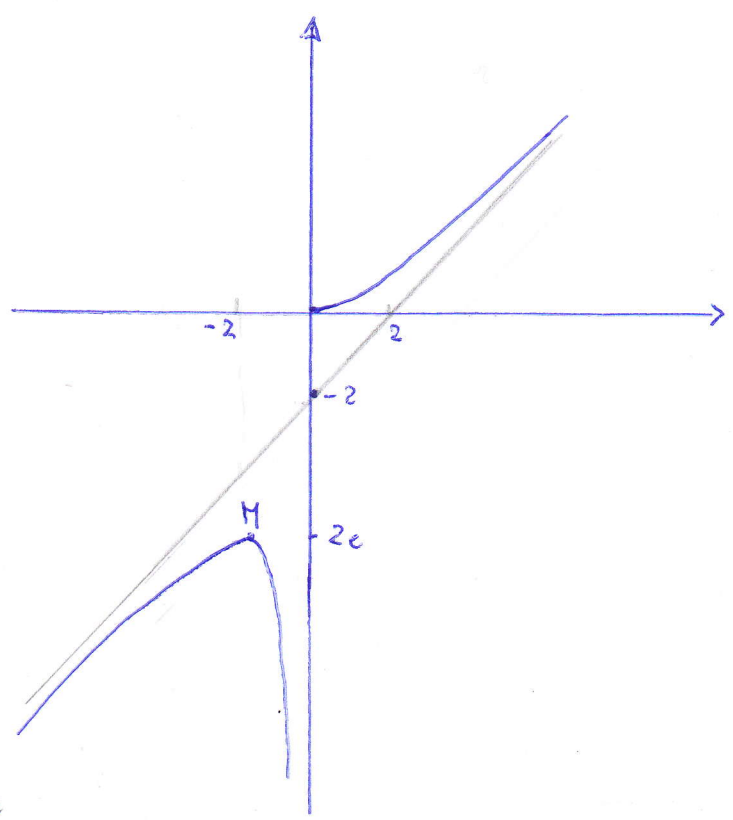
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 0$



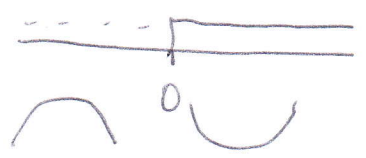
$M \begin{cases} x = -2 \\ y = -2e \end{cases}$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{2}{x}} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 0$

per gli ordini, segue che il grafico di g parte a destra di 0 con tangente orizzontale



$$g'(x) = e^{-\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^2} \left(1 + \frac{2}{x}\right) + e^{-\frac{2}{x}} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = e^{-\frac{2}{x}} \left(\frac{2}{x^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{x} - 1\right) = e^{-\frac{2}{x}} \cdot \frac{4}{x^3}$$

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$


5. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + 4\sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{1}{t^3 + 4t^2 + 5t} \cdot 4t^3 dt$ posto $\sqrt[4]{x} = t \Rightarrow x = t^4$
 $dx = 4t^3 dt$

$$= 4 \int \frac{t^3}{t^3 + 4t^2 + 5t} dt = 4 \int \left(1 - \frac{4t^2 + 5t}{t^3 + 4t^2 + 5t}\right) dt = 4 \int \left(1 - \frac{4t + 5}{t^2 + 4t + 5}\right) dt$$

$$= 4 \left[t - 2 \ln(t^2 + 4t + 5) - \operatorname{arctg}(t+2) \right] + C$$

perché $\int \frac{4t+5}{t^2+4t+5} dt = 2 \int \frac{2t+5/2}{t^2+4t+5} dt = 2 \int \frac{2t+5-5/2}{t^2+4t+5} dt = 2 \int \left(\frac{2t+5}{t^2+4t+5} - \frac{5/2}{t^2+4t+5} \right) dt$

$$= 2 \left[\ln(t^2+4t+5) - \frac{5}{2} \int \frac{dt}{(t+2)^2+1} \right] = 2 \ln(t^2+4t+5) - 5 \operatorname{arctg}(t+2) + C.$$

ii) Perché $R(x)$ è definita per $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ ed è continua nel suo dominio,
 osserva che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = +\infty \text{ con ord } \frac{1}{4} < 1$$

trascura infinitesimi più veloci

$\Rightarrow L$ è integrabile in s. i. in $[0, 1]$.

Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = 0$ con ord. $\frac{3}{4} < 1$
 trascura gli infiniti più lenti,

$\Rightarrow L$ non è integrabile in $I_1(+\infty)$.

Segue che R non è integ in $[0, +\infty)$ perché non lo è in $[1, +\infty)$.