

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

12 ottobre 2023

1. Risolvere la seguente equazione

$$iz^3 + z\bar{z} - 2 = 0.$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{9^{x+1} - 9 \cdot 3^x - 54}{2 \ln x - \ln(x^2 - 4)}}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \ln^2(x+1)}{e^{x^3} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - x + \ln^2(x+1)}{e^{x^3} - 1}.$$

4. Data

$$g(x) = \frac{\sqrt{\log_2 x}}{1 - \log_2 x}$$

- a) studiare la funzione e tracciarne il grafico approssimativo;
b) dire se è integrabile in $[0, 1[$, in $[1, 2[$ e in $[3, +\infty[$.
5. Calcolare

$$\int \frac{\sin^3 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$$

Svolgimento

$$1. \quad iz^3 + z\bar{z} - 2 = 0$$

Posto $z = x + iy$ l'equazione diventa

$$i(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3) + x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{array}{l} \text{uguagliando a 0} \\ \text{parte reale e parte} \\ \text{immaginaria si ha} \end{array}$$

$$\begin{cases} -3x^2y + y^3 + x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x^3 - 3x^2y = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} -3x^2y + y^3 + x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x(x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$I) \begin{cases} x = 0 \\ y^3 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad II) \begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ -8y^3 + y^3 + 3y^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

I) L'equazione $y^3 + y^2 - 2 = 0$ ha una radice reale $y = 1$. Dividendo

$$\text{per } y-1 \text{ si ha } (y-1)(y^2 + 2y + 2) = 0$$

$$\Delta < 0$$

che ha una soluzione reale $y = 1$.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 2 & // \end{array}$$

Quindi il sistema I) ha una soluzione $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ cioè $z = i$

$$II) \begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ -8y^3 + 4y^2 = 2 \end{cases} \quad 4y^3 - 2y^2 + 1 = 0 \quad \text{Le eventuali radici} \\ \text{razionali sono: } \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}.$$

$$\text{Per } y = -\frac{1}{2} \text{ si ha } 4\left(-\frac{1}{8}\right) - 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 0 \quad \text{cioè } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0 \quad 0 = 0$$

$$\text{cioè } y = -\frac{1}{2} \text{ è sol}$$

$$(y + \frac{1}{2})(4y^2 - 4y + 2) = 0$$

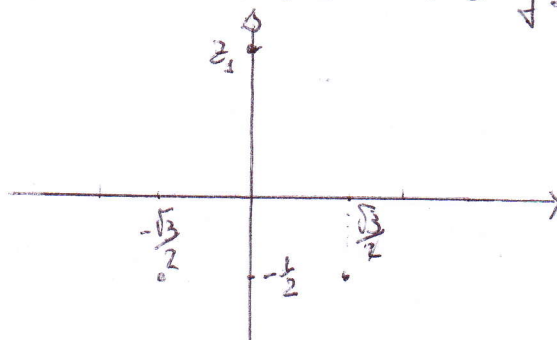
$$\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & +2 & -1 \\ \hline 4 & -4 & +2 & // \end{array}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 8 < 0 \quad \text{L'equazione ha solo la radice reale } y = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{3/4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'equazione data ha 3 soluzioni

$$z_1 = i, \quad z_{2/3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

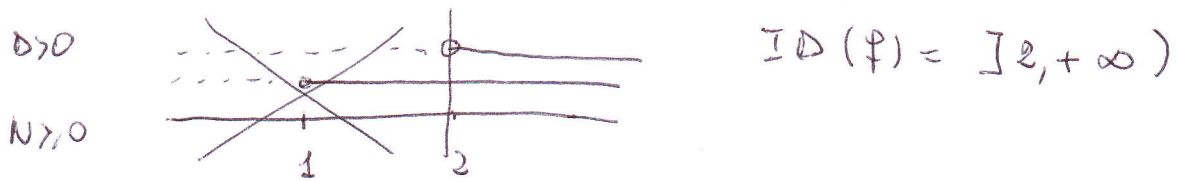


2.
$$\begin{cases} \frac{9^{x+1} - 9 \cdot 3^x - 54}{2 \ln x - \ln(x^2-4)} \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{"} \\ \text{"} \\ x > 0 \\ x < -2 \vee x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{"} \\ \text{"} \\ x > 2 \end{cases}$$

Basta dunque studiare la disequazione fra fraz. ricordando che la regola del segno va applicata per $x > 2$.

$N \geq 0 \quad 9^{x+1} - 9 \cdot 3^x - 54 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x - 54 \geq 0$
 $3^{2x} - 3^x - 6 \geq 0 \quad \Delta = 1 + 24 \quad (3^x)_{1/2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$
 $3^x \leq -2 \quad \vee \quad 3^x \geq 3$
 $\emptyset \quad \quad \quad x \geq 1$ Dunque $N \geq 0$ per $x \geq 1$

$D > 0 \quad 2 \ln x - \ln(x^2-4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \ln x^2 > \ln(x^2-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 > x^2-4 \quad \forall x \end{cases}$
 Dunque $D > 0$ per $x > 2$



3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \ln^2(x+1)}{e^{x^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x + (x + o(x^2))^2}{x^3 + o(x^3)}$
 (ricordo sviluppi di Taylor di $\sin x, \ln(x+1), e^x$)
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad \text{perché } \lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty.$
 (trascuro infinitesimi di ordine superiore)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - x + \ln^2(x+1)}{e^{x^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - x}{e^{x^3}} = 0$ perché l'esp. inf. per $x \rightarrow +\infty$ molto grande
 (trascuro infiniti di ordine inferiore e a maggior ragione $\sin x$ funz. limitata)

4.a) ID $\begin{cases} \lg_2 x \geq 0 \\ 1 - \lg_2 x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \lg_2 x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad ID = [1, 2[\cup]2, +\infty)$

Intersezione con asse y: $0 \notin ID$

$\begin{cases} y=0 \\ \lg_2 x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \quad (1, 0) \text{ intersezione con asse } x$

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \lg_2 x > 0 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{\lg_2 x}}{1 - \lg_2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{\lg_2 x}}{1 - \lg_2 x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad x=0 \text{ As. Vert.}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\lg_2 x}}{1 - \lg_2 x} = 0$ perché $\lg_2 x \rightarrow +\infty$ con ordine $>$ di $\sqrt{\lg_2 x}$

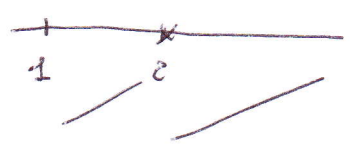
$y=0$ As. orizz.
 $y' = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{\lg_2 x}} (1 - \lg_2 x) + \sqrt{\lg_2 x} \right] \frac{1}{x \ln 2}}{(1 - \lg_2 x)^2} = \frac{1 - \lg_2 x + 2 \lg_2 x}{2 \sqrt{\lg_2 x} (1 - \lg_2 x)^2 x \ln 2} \Rightarrow$

$y' = \frac{1 + \lg_2 x}{(2 \ln 2) x \sqrt{\lg_2 x} (1 - \lg_2 x)^2} \quad ID(y') = ID(y) - \{1\}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \frac{1}{2 \ln 2 \cdot \sqrt{0}} = +\infty$

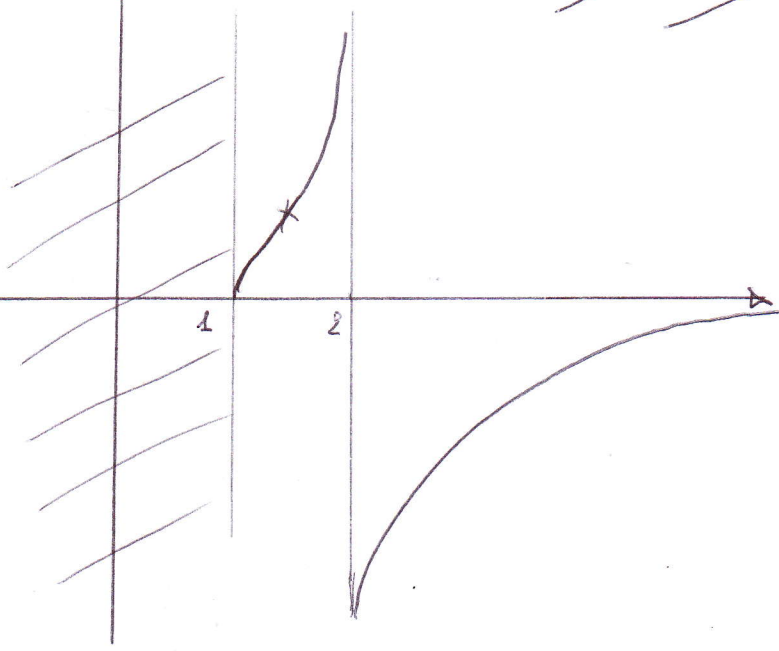
il grafico della funzione parte dal pto $(1, 0)$ con tangente verticale crescente e concavo.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \lg_2 x > 0$ sempre per $x \geq 1$



La funzione cresce strettamente
 in $[1, 2[$ e in $]2, +\infty)$

Non studiamo la derivata seconda. Si vede però che $\exists$ un flesso in $]1, 2[$ dovendo la funzione essere concava vicino 1 e convessa vicino 2.



4.b) La funzione non è definita in $[0,1]$ e quindi non è integr.

La funzione è definita e continua in $[1,2[$ ma non è integ.

in d.i. perché $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$ con ord 1 essendo

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1 - \lg_2 x}{x-2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{x \ln 2} = -\frac{1}{2 \ln 2} \neq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{cioè il denominatore} \\ \text{di } g \text{ è infinitesimo di ord 1} \end{array} \right)$$

La funzione ^(non) è integrabile in $[3, +\infty)$ perché continua ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\lg_2 x}}{1 - \lg_2 x} = 0 \text{ con ord. comunque lento e quindi } < \alpha < 1$$

essendo $g(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\lg_2 x}}$ dove $\lg_2 x \rightarrow +\infty$
con ordine comunque lento.

$$5. \int \frac{\sin^3 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} \cdot \sin x dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int -\cos^{-4} x \cdot D(\cos x) dx + \int \cos^{-2} x D \cos x dx + \int \operatorname{tg}^2 x \cdot D \operatorname{tg} x dx$$

$$= -\frac{\cos^{-3} x}{-3} + \frac{\cos^{-1} x}{-1} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + c.$$