

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

21 settembre 2023

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$iz^6 - 2z^3 - 3(i^{2023}) = 0.$$

2. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{0,5} \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - 1}.$$

3. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{\sin x}.$$

4. Data

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x}$$

a) studiare la funzione e tracciarne il grafico approssimativo;

b) dire se è integrabile in $[-\frac{\pi}{2}, 0[$, in $]0, 1]$, in $[1, +\infty[$.

5. Calcolare

$$\int \frac{(\cos x - 2) \sin x}{\cos^2 x - 5 \cos x + 6} dx.$$

Solgimento

1. Poiché $i^{2023} = i^{2020} \cdot i^3 = (i^4)^{505} \cdot i^2 \cdot i = -i$

l'equazione diventa

$i z^6 - 2z^3 + 3i = 0$ equazione binomica

Posto $w = z^3$ si ha $i w^2 - 2w + 3i = 0 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{i} = \begin{cases} -\frac{1}{i} = i \\ \frac{3}{i} = -3i \end{cases}$

$z^3 = i \Rightarrow z = \sqrt[3]{i} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$



Per $k=0$: $z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

per $k=1$: $z_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

per $k=2$: $z_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$

$z^3 = -3i \Rightarrow z = \sqrt[3]{-3i} = \left\{ \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$

Per $k=0$: $z_0 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt[3]{3} i$

per $k=1$: $z_1 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$

per $k=2$: $z_2 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$

L'equazione ha 6 radici date da $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $-i$, $\sqrt[3]{3}i$, $\sqrt[3]{3} \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$.

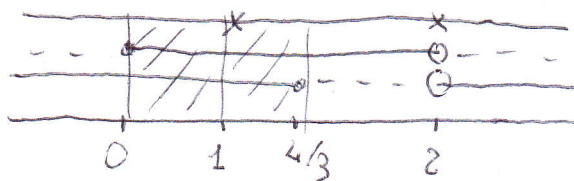
2. $\log_{0.5} \left| \frac{x-1}{x-2} \right| > 1 \Leftrightarrow 0 < \left| \frac{x-1}{x-2} \right| \leq \frac{1}{2}$ (poiché $\log_{0.5} x$ è st. decr. essendo la base in $]0, 1[$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x \neq 2 \\ -\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{x-2} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x \neq 2 \\ \frac{x-1}{x-2} + \frac{1}{2} \geq 0 \\ \frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{2} \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x \neq 2 \\ \frac{2x-2+x+2}{2(x-2)} \geq 0 \\ \frac{2x-2-x+2}{2(x-2)} \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x \neq 2 \\ \frac{3x-4}{x-2} \geq 0 \\ \frac{x}{x-2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x \neq 2 \\ x \leq 4/3 \vee x > 2 \\ 0 \leq x < 2 \end{cases}$



$D = [0, 1[\cup]1, 4/3]$.

3. Il limite è in realtà un limite destro poiché se $x \in \mathbb{R}$ la funzione x^a è definita solo per $x > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^a \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_1 \cdot \underbrace{\frac{x^a}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\text{oscille tra } -1 \text{ e } 1} = \begin{cases} \neq & \text{se } a \leq 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Infatti se $a > 1$ si ha prodotto di funzione infinitesima $\frac{x}{\sin x} \cdot x^{a-1}$ per funzione limitata, e quindi il limite è 0.

Se $a = 1$ si ha che $\frac{x}{\sin x} \cdot 1 \rightarrow 1$ mentre $\sin \frac{1}{x}$ oscille tra -1 e 1 e quindi il prodotto oscille tra -1 e 1.

Se $a < 1$ si ha che $\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{x^{1-a}} \rightarrow +\infty$ mentre $\sin \frac{1}{x}$ oscille tra -1 e 1 e quindi il prodotto oscille tra -1 e 1.

4. ID: $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad x_{1/2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

ID = $(-\infty, -3] \cup [-2, 0[\cup]0, +\infty)$
 f non è parzialmente dispersa non essendo ID simmetrico risp a 0
 l'intersezione con asse y poiché $0 \notin \text{ID}$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3, -2 \quad (-3, 0) \quad (-2, 0)$
 inters. con asse x

$g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x} > 0 \Rightarrow N > 0 \quad x < -3 \vee x > -2$
 $D > 0 \quad x > 0$

$g(x) > 0$ per $x > 0$

$g(x) < 0$ per $x < -3 \vee -2 < x < 0$

Asintoti

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x} = \frac{6}{0^\pm} = \pm \infty \quad x = 0 \text{ A.V.}$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\pm x}{x} = \pm 1$

l'asintoto orizzontale più lento

$y = \pm 1$ as. obliq a $\pm \infty$

(3)

$$y' = \frac{\frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+6}} \cdot x - \sqrt{x^2+5x+6}}{x^2} = \frac{2x^2+5x - 2x^2-10x-12}{x^2\sqrt{x^2+5x+6}} = -\frac{5x+12}{x^2\sqrt{x^2+5x+6}} \quad \forall x \in \text{ID}$$

$x \neq -3, -2$

Perché $\lim_{x \rightarrow -3^-} y' = \frac{3}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} y' = -\frac{2}{0^+} = -\infty$ segue che

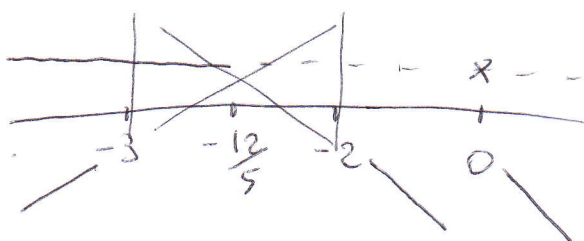
$$\text{ID}(y') = \text{ID}(y) - \{-3, -2\} \quad x = -3, x = -2 \text{ pli di semicuspide}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow -5x - 12 > 0$$

$$x < -\frac{12}{5}$$

y cresce in $(-\infty, -3]$

y decresce in $[-2, 0[$ e in $]0, +\infty)$



$$y'' = -\frac{1}{2} \frac{5x^2\sqrt{x^2+5x+6} + (5x+12) \left(2x\sqrt{x^2+5x+6} - x^2 \frac{2x+5}{x^2+5x+6} \right)}{x^2(x^2+5x+6)}$$

Perché la derivata seconda è lunga, ometto lo studio del segno anche perché si riesce a dedurre concavità e convessità della funzione dagli altri elementi a disposizione

b) y è continua in $]-\frac{1}{2}, 0[\subset \text{ID}(y)$

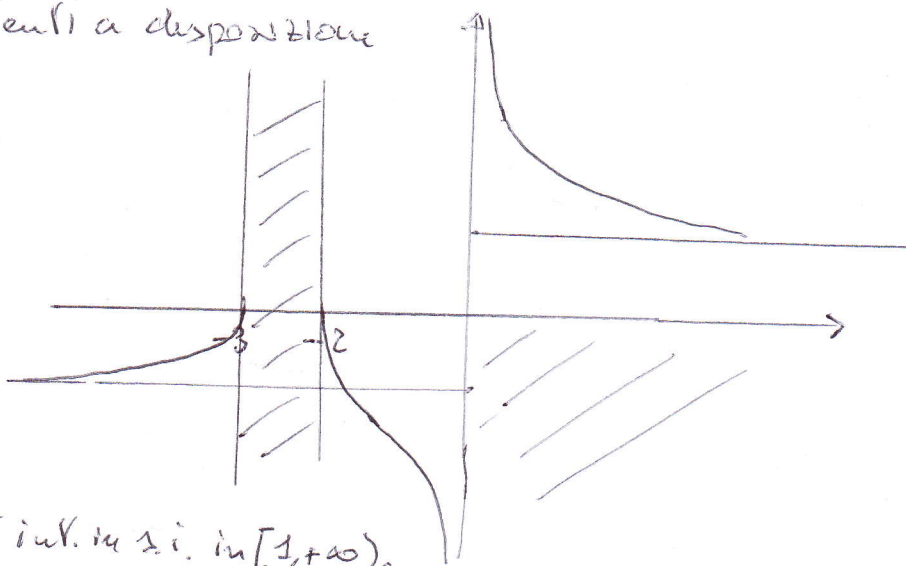
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \text{ con cui } 1$$

$\Rightarrow y$ non è int. in s.i. in $]-\frac{1}{2}, 0[$

Per lo stesso motivo non lo è

in $]0, 1]$. Infine perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \neq 0 \quad y \text{ non è int. in s.i. in } [1, +\infty).$$



5. Posto $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ si ha

$$\int \frac{(\cos x - 2)\sin x}{\cos^2 x - 5\cos x + 6} dx = -\int \frac{t-2}{t^2-5t+6} dt = -\int \frac{t-2}{(t-2)(t-3)} dt$$

$$= -\ln|t-3| + C = -\ln|\cos x - 3| + C = -\ln(3 - \cos x) + C$$