

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

17 luglio 2023

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$|z| z^3 + z^3 - 8 |z| i - 8i = 0.$$

2. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lg_3 \lg_{\frac{1}{2}}(2x+1)}{2^{2x} + 2^{2x-1} - \frac{1}{2}}}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^4} - 2}{\arcsin^4 x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 4} - 2}{\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)^{-3}}.$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = x^3 |\ln x - 1|$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\sin^7 x + 1}{\sin^3 x}$$

- i) calcolare

$$\int h(x) dx;$$

- ii) studiare l'integrabilità di h in $]0, 1]$, in $[1, \frac{\pi}{2}]$ e in $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Soluzioni

1. $z^3(121+1) - 8i(121+1) = 0$

$(z^3 - 8i)(121+1) = 0$

$z^3 = 8i \quad \vee \quad 121 = -1 \quad (\Rightarrow) \quad z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})}$

$\Rightarrow z = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) \mid k \in \{0, 1, 2\}$

L'equazione ha 3 radici complesse

$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$

$z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$

$z_2 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i$

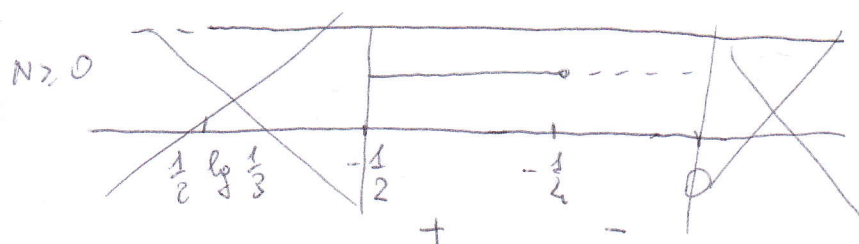
2. $\frac{\lg_3 \lg_{\frac{1}{2}}(2x+1)}{2^{2x} + 2^{2x-1} - \frac{1}{2}} \geq 0 \Rightarrow$ Applico la regola del segno dopo aver studiato il dominio di questa frazione

$\begin{cases} \lg_{\frac{1}{2}}(2x+1) > 0 \\ 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} - \frac{1}{2} \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < 2x+1 \leq 1 \\ \frac{3}{2} \cdot 2^{2x} \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ 2^{2x} \neq \frac{1}{3} \end{cases} \quad x \neq \frac{1}{2} \lg_2 \frac{1}{3}$

$N \geq 0 \quad \lg_3 \lg_{\frac{1}{2}}(2x+1) \geq 0 \quad \lg_{\frac{1}{2}}(2x+1) \geq 1 \quad 0 < 2x+1 \leq \frac{1}{2}$
 $-\frac{1}{2} < x \leq -\frac{3}{4}$

$D > 0 \quad 3 \cdot 2^{2x} - 1 > 0 \quad 2^{2x} > \frac{1}{3} \quad x > \frac{1}{2} \lg_2 \frac{1}{3}$

Si noti che $\frac{1}{2} \lg_2 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \lg_2 3 < -\frac{1}{2}$



$ID = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right]$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^4} - 2}{\arcsin^4 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(-x^4) \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x^4}}}{\arcsin^4 x} = -\frac{1}{4}$

perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 4} - 2}{(\arcsen \frac{1}{x})^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{(\frac{1}{x})^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0 \quad (2)$$

poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arcsen \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\arcsen y}{y} = 1$

4. ID: $x > 0$ Δ intersezione con asse y $\begin{cases} y=0 \\ x^3/(\ln x - 1) = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow x=0$ non acc. $\vee \ln x = 1 \Rightarrow x=e$ $(e, 0)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3/|\ln x - 1| = 0 \cdot (+\infty) = 0$ per gli ordini (poiché $\ln x$ infinito di ordine comunque lento)

La funzione è prolungabile per continuità in $x=0$ ponendo $g(0)=0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3/|\ln x - 1| = +\infty$ Δ as. orizzontale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3/|\ln x - 1|}{x} = +\infty$ Δ as. oblique

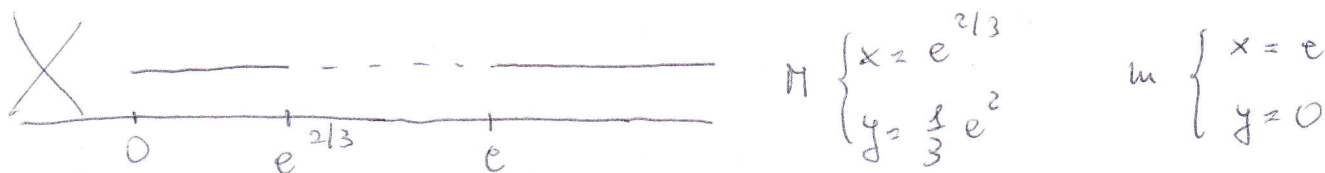
$y' = 3x^2/|\ln x - 1| + x^2 \frac{\ln x - 1}{|\ln x - 1|} \cdot \frac{1}{x} = x^2 (3/|\ln x - 1| + \frac{\ln x - 1}{|\ln x - 1|})$

ID(y') = ID(y) - $\{x: \ln x = 1\} \Leftrightarrow$ ID(y') =]0, e[$\cup$]e, + ∞)

Poiché $y' = \begin{cases} x^2(3(\ln x - 1) + 1) & \text{se } \ln x > 1 \text{ cioè } x > e \\ x^2(3(-\ln x + 1) - 1) & \text{se } \ln x < 1 \text{ cioè } 0 < x < e \end{cases}$

Alte $\lim_{x \rightarrow e^-} y' = -e^2$ $\lim_{x \rightarrow e^+} y' = e^2$ $x=e$ pto cuspidale

$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > e \\ x^2(3\ln x - 2) > 0 \\ x > e^{2/3} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < e \\ x^2(-3\ln x + 2) > 0 \\ x < e^{2/3} \end{cases} \Leftrightarrow x > e \vee 0 < x < e^{2/3}$



Tuttavia $x=0$ pto di minimo per il prolungamento da 0 con

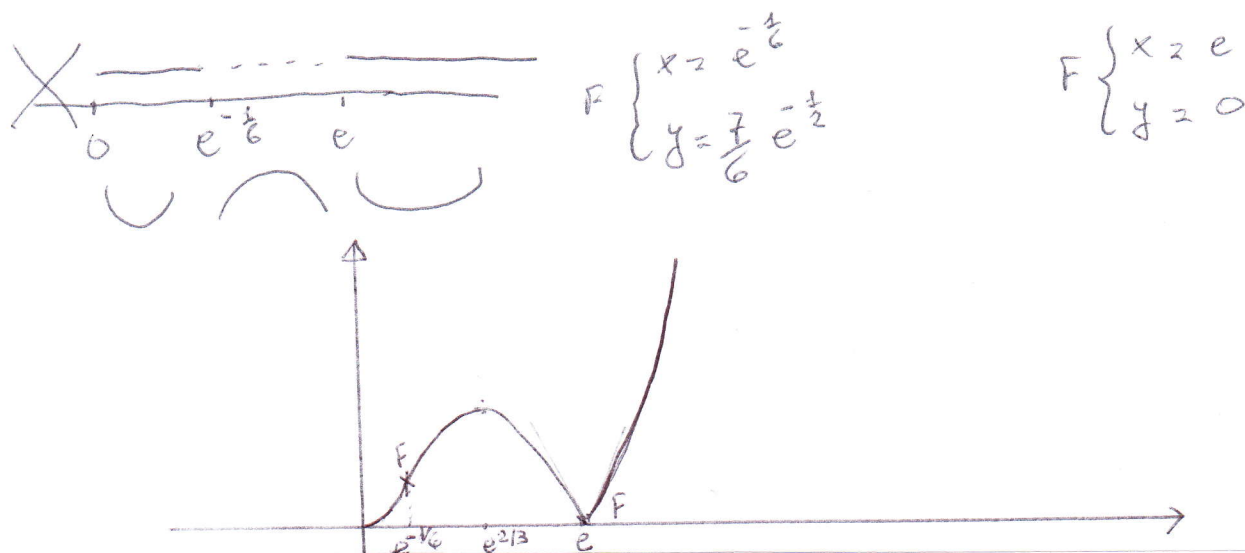
$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0(+\infty) = 0$ per gli ordini

Poiché $g'(x) = \begin{cases} x^2(3 \ln x - 2) & \text{se } x > e \\ x^2(-3 \ln x + 2) & \text{se } 0 < x < e \end{cases}$

segue che $g''(x) = \begin{cases} 2x(3 \ln x - 2) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(6 \ln x - 1) & \text{se } x > e \\ 2x(-3 \ln x + 2) + x^2(-\frac{3}{x}) = x(-6 \ln x - 1) & \text{se } 0 < x < e \end{cases}$

$g'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > e \\ 6 \ln x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < e \\ 6 \ln x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > e \\ x > e^{1/6} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < e \\ x < e^{-1/6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < x < e^{-1/6} \vee x > e$



5. v) $\int \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^3 x} dx = \int \sin^4 x dx + \int \frac{1}{\sin^3 x} dx$ dove

$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$

$= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 2x \right) dx$

$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - \frac{3}{4} \sin 2x \right) + C = \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x + C$

$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int D(-\cot x) \cdot \frac{1}{\sin x} dx \stackrel{p.p.}{=} -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \cot x \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{1}{\sin x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln | \tan \frac{x}{2} | + C$
 $t = \tan \frac{x}{2} \quad x = 2 \arctan t \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

vi) h non è integ. in s. i. su $[0, 1]$ perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^4 x + \frac{1}{\sin^3 x} = +\infty$ con ord 3 > 1

h è int. in senso classico in $[1, \frac{\pi}{2}]$ perché continua in un intervallo chiuso e limitato

h non è integ. in s. i. in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ perché $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin^4 x + \frac{1}{\sin^3 x} = +\infty$ con ord 3 > 1 essendo $\sin x \sim x - \pi$ se $x \rightarrow \pi$