

**Corso di laurea in Chimica**  
**Esame di**  
**ISTITUZIONI di MATEMATICHE I**

18 maggio 2023

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$z^2 + |z|^2 + 2iz = z\bar{z} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25}.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x - \frac{x^2}{2}}{e^{-x^2} - 1 + (\arcsin x) \ln(1+x)}.$$

3. Studiare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \sqrt{\frac{\ln_{\frac{1}{2}}(3^x + 1) + \ln_2(3^x - 1)}{2^{2x} - 2^{x+1} - 3}}.$$

4. Studiare la funzione

$$y = |x - 1| + 3 \ln \frac{|x - 1| - 1}{|x - 1| - 2}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Denotata con  $f$  la funzione del punto precedente,

- i) calcolare l'area del rettangoloide relativo a  $f$  di base  $[4, 10]$ ;  
ii) dire se  $f$  è integrabile in  $]2, \frac{5}{2}]$ , in  $]3, 4]$  e in  $[4, +\infty)$ .

# Svolgimento

1. Poiché  $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25} = \left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^{25} = \left(\frac{1+i^2+2i}{1+1}\right)^{25} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{25} = i^{25} = (i^4)^6 \cdot i = i$$

l'equazione diventa

$$z^2 + 2iz - i = 0 \quad \text{equazione di 2° grado in } \mathbb{C}$$

Poiché  $\frac{\Delta}{4} = i^2 + i = -1 + i$  e  $\sqrt{-1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)}$

$$= \left\{ \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{2} \right) \mid k \in \{0, 1\} \right\} = \pm \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi \right)$$

Le soluzioni dell'equazione sono

$$z_{1,2} = -i + \sqrt{-1+i} = -i \pm \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi \right) = \pm \sqrt[4]{2} \cos \frac{3}{8}\pi + i \left( \pm \sqrt[4]{2} \sin \frac{3}{8}\pi - 1 \right)$$

(Volendo, si potrebbe calcolare  $\sin \frac{3}{8}\pi$  e  $\cos \frac{3}{8}\pi$  con le formule di bisezione)

2. Poiché  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{si ha}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - x - \frac{x^2}{2}}{-x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4) + \left( x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left( x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{6} \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^4) - \cancel{x} - \frac{x^2}{2}}{-x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + \cancel{x^2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{-\frac{x^3}{2}} = 0$$

3.  $\frac{\ln_2(3^x+1) + \ln_2(3^x-1)}{2^{2x} - 2^{x+1} - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln_2(3^x+1) + \ln_2(3^x-1)}{2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3} \geq 0$

Applico la regola del segno nel dominio della funzione

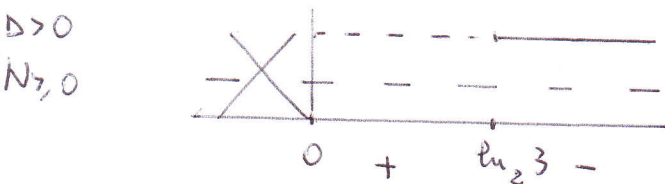
$$\text{con per } \begin{cases} 3^x - 1 > 0 & 3^x > 1 \\ 3^x + 1 > 0 & \forall x \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

$$N \geq 0 \quad \ln_2(3^x - 1) > \ln_2(3^x + 1) \Leftrightarrow 3^x - 1 > 3^x + 1 \quad \emptyset$$

perché la base è  $e > 1$

$$D > 0 \quad 2^x - 2 \cdot 2^x - 3 > 0 \quad 2^x = y \quad y^2 - 2y - 3 > 0 \quad y < -1 \vee y > 3$$

$$2^x < -1 \quad \emptyset \quad \vee \quad 2^x > 3 \quad x > \ln_2 3$$



$$ID = ]0, \ln_2 3[.$$

4. ID  $\frac{|x-1|-1}{|x-1|-2} > 0$        $N \geq 0 \quad |x-1| > 1 \Leftrightarrow x-1 < -1 \vee x-1 > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$

$D > 0 \quad |x-1| > 2 \Leftrightarrow x-1 < -2 \vee x-1 > 2 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 3$

La funzione non è né pari né dispari, ma è simmetrica rispetto alla retta  $x=1$ . La studio perciò per  $x \geq 1$  e poi ne ribalto il grafico rispetto a tale retta. Studio perciò

$$y = x - 1 + 3 \ln \frac{x-2}{x-3} \quad \text{per } x \geq 1 \quad \text{cioè in } [1, 2[ \cup ]3, +\infty)$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \ln \frac{1}{2} = -3 \ln 2 \end{cases}$$

$$(1, -3 \ln 2)$$

Non studio intersezioni del grafico con asse  $x$  e positivo perché serve metodo grafico

Asintoti Verticali

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 + 3 \ln \frac{x-2}{x-3} = 1 + 3 \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty \quad x = -2 \text{ A. Vert.}$$

$$y = \frac{x-2}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x - 1 + 3 \ln \frac{x-2}{x-3} = 2 + 3 \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty \quad x = 3 \text{ A. Vert.}$$

Asintoto orizzontale a  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + 3 \ln \frac{x-2}{x-3} = +\infty$$

$\xrightarrow{\ln} \ln 1 = 0$

~~A~~ as. obliq.

Asintoto obliquo a  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} + 3 \frac{\ln \frac{x-2}{x-3}}{x} = 1 \quad (\text{essenziale coefficiente angolare as ob.})$$

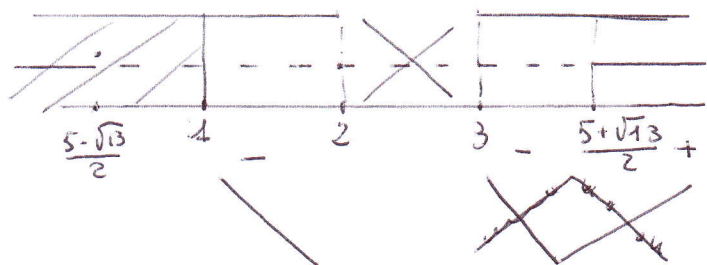
$\rightarrow 0/\infty = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + 3 \ln \frac{x-2}{x-3} - x = -1 \quad y = x - 1 \text{ A. ob. a } +\infty$$

$$y' = 1 + 3 \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdot \frac{x-3-x+2}{(x-3)^2} = 1 - \frac{3}{x^2-5x+6} = \frac{x^2-5x+3}{x^2-5x+6}$$

$$y' > 0 \quad N > 0 \quad x^2 - 5x + 3 > 0 \quad x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \quad x < \frac{5-\sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$$D > 0 \quad x^2 - 5x + 6 > 0 \quad (x-2)(x-3) > 0 \quad x < 2 \vee x > 3$$



La funzione è

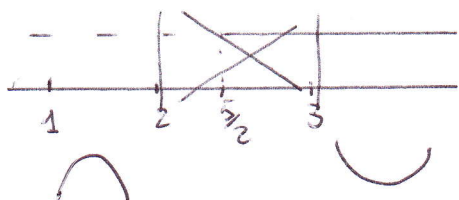
st. crescente in  $]\frac{5-\sqrt{13}}{2}, +\infty[$

st. decr. in  $]1, 2[$  e in  $]3, \frac{5+\sqrt{13}}{2}[$

$x=1$  Max. rel  $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$  min. rel

$$y'' = \frac{(2x-5)(x^2-5x+6) - (2x-5)(x^2-5x+3)}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{(2x-5)(x^2-5x+6-x^2+5x-3)}{(x^2-5x+6)^2}$$

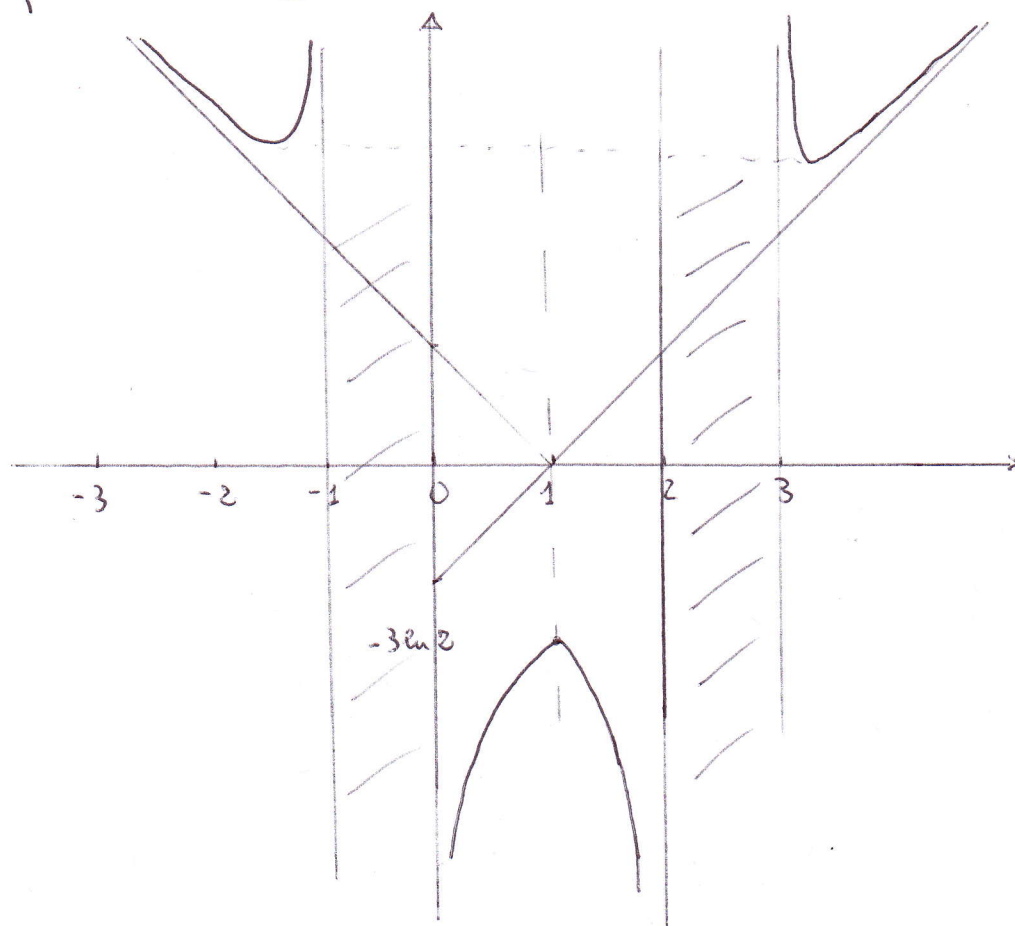
$$y'' > 0 \quad 2x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$



anzi ricordando il dominio di  $y$ ,

$y'' > 0$  per  $x > 3 \Leftrightarrow y$  st. convessa

$y'' < 0$  per  $1 \leq x < 2 \Leftrightarrow y$  st. concava



5. i) Poiché  $f$  è positiva nell'intervallo  $[4, 10]$ , l'area del rettangoloide relativo a  $f$  di base  $[4, 10]$  è uguale a  $\int_4^{10} f(x) dx$ . Calcolo prima

$$\int_4^{10} f(x) dx = \int_4^{10} (x-1 + 3 \ln \frac{x-1}{x-2}) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_4^{10} + 3 \int_4^{10} (\ln(x-1) - \ln(x-2)) dx.$$

$x > 1$  quindi tolgo il valore assoluto

Poiché integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int \ln(x-1) dx &= x \ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} dx = x \ln(x-1) - \int (1 + \frac{1}{x-1}) dx \\ &= x \ln(x-1) - x - \ln(x-1) + C_1(x-1) \ln(x-1) - x + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x-2) dx &= x \ln(x-2) - \int \frac{x}{x-2} dx = x \ln(x-2) - \int (1 + \frac{2}{x-2}) dx \\ &= x \ln(x-2) - x - 2 \ln(x-2) + C = (x-2) \ln(x-2) - x + C \end{aligned}$$

si conclude che

$$\begin{aligned} \text{area } R_f &= \left[ \frac{x^2}{2} - x + 3 \left[ (x-1) \ln(x-1) - x - (x-2) \ln(x-2) + x \right] \right]_4^{10} \\ &= 50 - 10 + 3 (9 \ln 9 - 8 \ln 8) - 8 + 4 - 3 (3 \ln 3 - 2 \ln 2) \\ &= 36 + 3 (18 \ln 3 - 24 \ln 2) - 9 (3 \ln 3 - 2 \ln 2) = 36 + 45 \ln 3 - 54 \ln 2. \end{aligned}$$

ii) Poiché  $f$  non è definita in  $] \frac{3}{2}, \frac{5}{2} ]$ , non ha senso calcolarne l'integrale in questo intervallo.

Poiché  $f$  è continua in  $] 3, 4 ]$  e

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 + 3 \ln \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 + 3 \underbrace{\ln(x-2)}_{\downarrow 0} - 3 \underbrace{\ln(x-3)}_{\downarrow +\infty} = +\infty$$

con ordine molto piccolo e quindi  $< x < 1$

$f$  è integrabile in senso improprio in  $] 3, 4 ]$ .

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + 3 \ln \frac{x-2}{x-3} = +\infty$$

$f$  non è integrabile in a.i. in  $[4, +\infty)$  e  $\int_4^{+\infty} f(x) dx = +\infty$ .