Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

12 aprile 2023

1. Risolvere la seguente equazione
$$z + \bar{z} - 3\,\mathrm{Im}\,z = z^2 + |z|\,.$$

2. Studiare il dominio della funzione
$$f(x) = \left(\frac{\arcsin\sqrt{2x - x^2}}{-e^{-x^2} + e^{|x|}}\right)^{-\sqrt{2}}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{e^{x^2} - 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 - \sin^3 x}{e^{x^2} - 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4}$$

4. Studiare la funzione
$$g(x) = \frac{|x-1|}{\ln|x-1|}$$
e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione
$$h(x) = x^2 \arctan\frac{2}{x^2}$$
i) calcolare
$$\int h(x)dx;$$
ii) studiare l'integrabilità in senso improprio di h in $]0,1]$ e in $[1,+\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = x+iy$ con $\text{Re}\, z = x$, $\text{Im}\, z = y$ si ha

$$2x-3y=(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2} \iff 2x-3y = x^2-y^2+2xyi+\sqrt{x^2+y^2} \iff$$

$$\begin{cases} 2x-3y-x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3y+y^2-|y|=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-x^2-|x|=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y\geq 0 \\ -3y+y^2-y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y<0 \\ -3y+y^2+y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x\geq 0 \\ 2x-x^2-x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x<0 \\ 2x-x^2+x=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y\geq 0 \\ y^2-4y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y<0 \\ y^2-2y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x\geq 0 \\ x^2-x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x<0 \\ x^2-3x=0 \end{cases}$$

$y=0 \vee y=4$ acc $\quad$ $y=0 \vee y=2$ non acc $\quad$ $x=0 \vee x=1$ acc. acc $\quad$ $x=0 \vee x=3$ non acc.

L'eq. ha 3 soluzioni $z=0$, $z=4i$, $z=1$.

2. $$\frac{\arcsin\sqrt{2x-x^2}}{-e^{-x^2}+e^{|x|}}>0$$ Studio prima il dominio della frazione e poi applico la regola del segno

$$\begin{cases} -1\leq\sqrt{2x-x^2}\leq 1 \\ -e^{-x^2}+e^{|x|}\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2x-x^2}\geq -1 \\ \sqrt{2x-x^2}\leq 1 \\ e^{-x^2}\neq e^{|x|} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-x^2\geq 0 \\ 2x-x^2\leq 1 \\ -x^2\neq |x| \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 2 \\ x^2-2x+1\geq 0 & \forall x \\ x^2+|x|\neq 0 & \forall x\neq 0 \end{cases}$$

La frazione è definita in $]0,2]$.

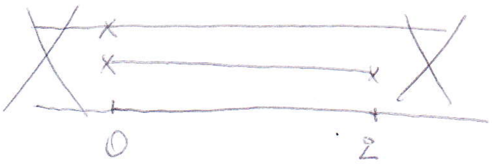
$N>0$ $\quad \arcsin\sqrt{2x-x^2}>0 \iff 0<\sqrt{2x-x^2}\leq 1 \Rightarrow 2x-x^2>0$

$0<x<2$

$D>0$ $\quad -e^{-x^2}+e^{|x|}>0 \iff e^{|x|}>e^{-x^2} \iff |x|>-x^2$ $\quad |x|^2+|x|>0$

$|x|<-1 \vee |x|>0 \iff x\neq 0$

$\emptyset \qquad x\neq 0$



$ID =]0,2[$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-\operatorname{sen}^3 x}{e^{x^2}-1-x^2-\frac{1}{2}x^4} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3}{\cancel{1}+\cancel{x^2}+\cancel{\frac{x^4}{2}}+\frac{x^6}{6}+o(x^6)-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{\frac{x^4}{2}}}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+\cancel{3}x^2\cdot\frac{x^3}{\cancel{6}_2}+o(x^5)}{\frac{x^6}{6}+o(x^6)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^5}{2}}{\frac{x^6}{6}} = \lim_{x\to 0}\dfrac{3}{x}$ $\nexists$ poiché

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-\operatorname{sen}^3 x}{e^{x^2}-1-x^2-\frac{1}{2}x^4} = \lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{e^{x^2}} = 0$ poiché $\operatorname{ord}(x^3) < \operatorname{ord}(e^{x^2})$

3 comunque grande

trascuro gli infiniti più lenti e le quantità limitate

4. ID $\begin{cases}|x-1|>0\\ \ln|x-1|\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ |x-1|\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ x-1\neq \pm 1\end{cases}$ $x\neq 1$, $x\neq 0, 2$ $ID = \mathbb{R}-\{0,1,2\}$

g non è né pari né dispari ma è simmetrica rispetto alla retta $x=1$ $\begin{cases}y=0\\ g(x)=0\end{cases} \Rightarrow |x-1|=0 \Rightarrow x=1$ non acc $\nexists$ intersez. con gli assi

$g>0 \iff \dfrac{|x-1|}{\ln|x-1|}>0 \iff |x-1|>1 \Rightarrow x-1<-1 \vee x-1>1 \iff x<0 \vee x>2$

$+\quad 0 \quad - \quad 1 \quad - \quad 2 \quad +$

Asintoti verticali

$\lim_{x\to 0^+}\dfrac{|x-1|}{\ln|x-1|} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{|x-1|}{\ln|x-1|} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $x=0$ A.V.

$\lim_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{\ln|x-1|} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$ la funzione è prolungabile per continuità per $x=0$

$\lim_{x\to 2^-}\dfrac{|x-1|}{\ln|x-1|} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{|x-1|}{\ln|x-1|} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $x=2$ A.V.

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x-1|}{\ln|x-1|} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ per gli ordini $\nexists$ As. orizz.

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x-1|}{x\ln|x-1|} = 0$ per gli ordini (essendo $\operatorname{ord}(x\ln|x-1|)>1$) $\nexists$ As. obliqui

$y' = \dfrac{\frac{x-1}{|x-1|}\ln|x-1| - |x-1|\cdot\frac{1}{x-1}}{\ln^2|x-1|} = \dfrac{\frac{x-1}{|x-1|}\left(\ln|x-1|-1\right)}{\ln^2|x-1|}$ $\forall x \ni' \begin{cases}x\neq 1\\ \ln|x-1|\neq 0 \quad x\neq 0,2\end{cases}$

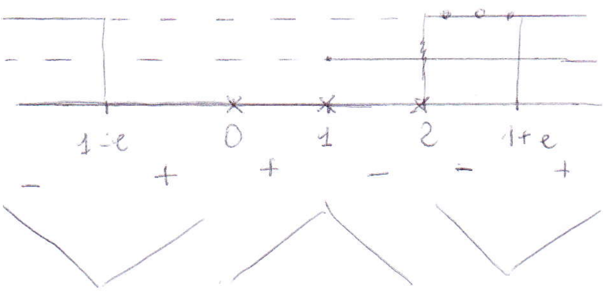
$ID(y') = ID(y)$ non ci sono pti di non derivabilità

$\lim_{x\to 1^\pm} y' = \lim_{x\to 1^\pm}\underbrace{\dfrac{x-1}{|x-1|}}_{\pm 1}\underbrace{\dfrac{\ln|x-1|-1}{\ln^2|x-1|}}_{1/\infty} = 0$ Il prolungamento continuo di g in $x=1$ è derivabile con derivata $=0$.

$y' > 0 \iff (x-1)(\ln|x-1|-1) > 0$ $\qquad x>1$

$\ln|x-1|>1 \iff |x-1|>e \iff x-1<-e \vee x-1>e$

$x<1-e \vee x>1+e$



in $\begin{cases} x=1-e \\ y=\frac{e}{\ln e}=e \end{cases}$ $\qquad$ in $\begin{cases} x=1+e \\ y=\frac{e}{\ln e}=e \end{cases}$

$$y'=\begin{cases} \dfrac{\ln(x-1)-1}{\ln^2(x-1)} & x>1,\ x\neq 2 \\ -\dfrac{\ln(1-x)-1}{\ln^2(1-x)} & x<1,\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y''=\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{x-1}\ln^2(x-1)-\frac{2\ln(x-1)}{x-1}(\ln(x-1)-1)}{\ln^4(x-1)} & x>1 \\ -\dfrac{-\frac{\ln^2(1-x)}{1-x}+\frac{2\ln(1-x)}{1-x}\cdot(\ln(1-x)-1)}{\ln^4(1-x)} & x<1 \end{cases}$$

$$y''=\begin{cases} \dfrac{-\ln^2(x-1)+2\ln(x-1)}{(x-1)\ln^4(x-1)} & x>1 \wedge x\neq 2 \\ \dfrac{-\ln^2(1-x)+2\ln(1-x)}{(1-x)\ln^4(1-x)} & x<1 \wedge x\neq 0 \end{cases}$$

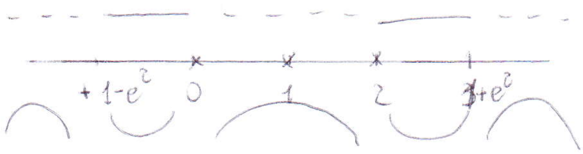
segue che

$$y''=\frac{-\ln^2|x-1|+2\ln|x-1|}{|x-1|\ln^4|x-1|} \qquad \forall x\neq 0,1,2$$

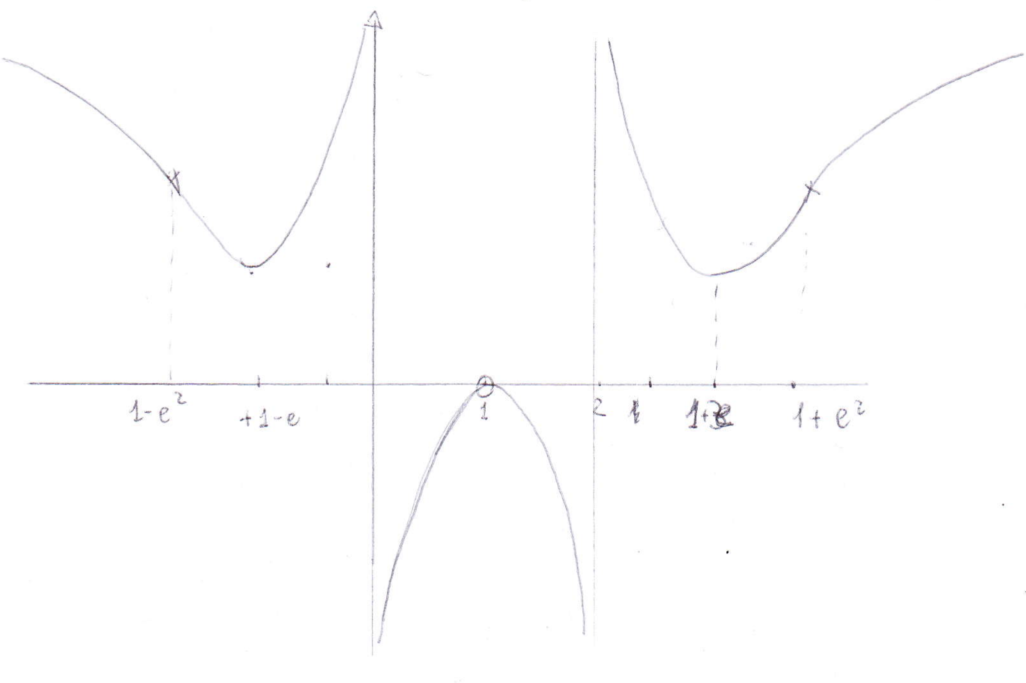
$y''>0 \iff -\ln^2|x-1|+2\ln|x-1|>0 \iff 0<\ln|x-1|<2 \iff$

$1<|x-1|<e^2 \iff 1<x-1<e^2 \vee -e^2<x-1<-1 \iff$

$2<x<1+e^2 \vee -e^2+1<x<0$



$P_1 \begin{cases} x=1-e^2 \\ y=\frac{e^2}{\ln(e^2)}=\frac{e^2}{2} \end{cases}$ $\qquad P_2 = \begin{cases} x=1+e^2 \\ y=\frac{e^2}{\ln(e^2)}=\frac{e^2}{2} \end{cases}$



5. i) $\int x^2 \operatorname{arctg}\frac{2}{x^2}\,dx = \int \left(D\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2}\,dx \overset{P.P.}{=} \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} - \int \frac{\cancel{x^3}}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{x^4}}\left(-\frac{4}{\cancel{x^3}}\right)dx$

$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} + \frac{4}{3}\int \frac{x^4}{x^4+4}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} + \frac{4}{3}\int\left(1-\frac{4}{x^4+4}\right)dx$

$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} + \frac{4}{3}x - 4\int\frac{1}{x^4+4}\,dx$

$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{(x^2+2)^2-4x^2} = \frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$

$= \frac{Ax^3+2Ax^2+2Ax+Bx^2+2Bx+2B+Cx^3-2Cx^2+2Cx+Dx^2-2Dx+2D}{x^4+4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-2C+D=0 \\ 2A+2B+2C-2D=0 \\ 2B+2D=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A+C=0 \\ 2A-2C+\frac{1}{2}=0 \\ B-D=0 \\ B+D=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} A=-C \\ A=-\frac{1}{8} \\ B=D \\ B=\frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} C=\frac{1}{8} \\ A=-\frac{1}{8} \\ B=D=\frac{1}{4} \end{cases}$

$-4\int\frac{1}{x^4+4}\,dx = -4\int\frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}\,dx - 4\int\frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}\,dx = +\frac{1}{2}\int\frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{2}{x^2-2x+2}\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{2}{x^2+2x+2}\,dx$

$= \frac{1}{4}\ln(x^2-2x+2) - \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx - \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + c$

$\Rightarrow \int x^2\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} + \frac{4}{3}x + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + c$

ii) f è definita e continua $\forall x \neq 0$. Segue che

In $]0,1]$ f è integrabile perché $\lim_{x\to 0^+} x^2\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} = 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0$ quindi prolungabile per continuità in 0.

In $[1,+\infty)$ f non è integ. in senso improprio perché

$\lim_{x\to+\infty} x^2\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \underset{\frac{1}{x^2}=y}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2y}{y} = 2 \neq 0.$