

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

13 marzo 2023

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^4 + \bar{z}^4 = |z|^4 + i^{840} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1+2i}{1-i} \right).$$

2. Studiare il dominio della funzione

$$y = \frac{\ln(e^{x^2} - e^{|x|})}{\sqrt{\ln(2^{x^2}) - \ln(2^{|x|}) - 1}}.$$

3. Studiare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}}.$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = x + \ln \left(\frac{x^2}{|x-1|} \right)$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\sin 2x}{\sin^3 x - 1}$$

- i) calcolare

$$\int h(x) dx;$$

- ii) studiare l'integrabilità in senso improprio di h in $[0, 1]$ e in $]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Svolgimento

1. Poiché $2 \operatorname{Re} \left(\frac{1+2i}{1-i} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1+2i+i-2}{2} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$
 $i^{840} = (i^4)^{210} = 1^{210} = 1$

l'equazione diventa

$z^4 + \bar{z}^4 = |z|^4 + 1 - 8$. Posto $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e quindi

$\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

per l'identità $\sin \alpha = \sin \beta$

$\rho^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) + \rho^4(\cos(-4\theta) + i \sin(-4\theta)) = \rho^4 \Leftrightarrow$

$\rho^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta + \cos 4\theta - i \sin 4\theta) = \rho^4 \Leftrightarrow$

$\rho^4(2 \cos 4\theta - 1) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \cos 4\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = 0 \vee 4\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

con $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee \begin{cases} \rho > 0 \\ \theta = \pm \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$k \in \{0, 1, 2, 3\}$ oppure $\theta = \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{5\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}$

Quindi ho infinite soluzioni, oltre quelle nulle, date dai ρ del tipo

$z_0 = \rho(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$

$z_1 = \rho(\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}))$

$z_2 = \rho(\cos(\frac{\pi}{12} + \pi) + i \sin(\frac{\pi}{12} + \pi))$

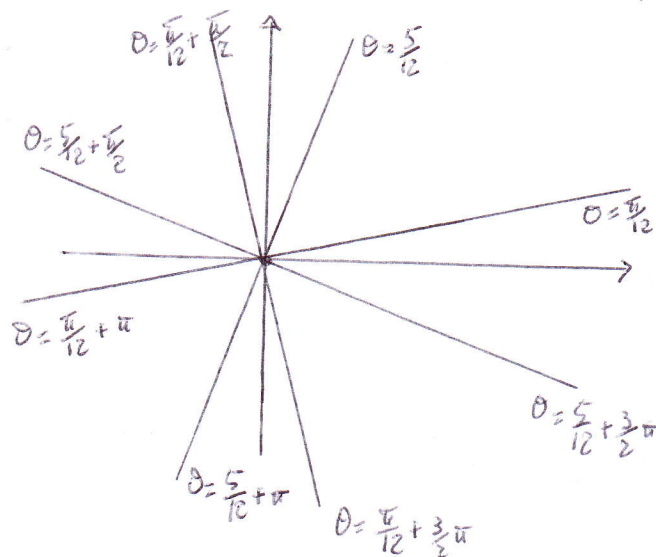
$z_3 = \rho(\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}))$

$w_0 = \rho(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i \sin(\frac{5\pi}{12}))$

$w_1 = \rho(\cos(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}))$

$w_2 = \rho(\cos(\frac{5\pi}{12} + \pi) + i \sin(\frac{5\pi}{12} + \pi))$

$w_3 = \rho(\cos(\frac{5\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}))$



Le soluzioni nel piano complesso sono rappresentate dai punti che si trovano su 8 rette del piano.

2. $\begin{cases} e^{x^2} - e^{|x|} > 0 & (1) \\ \ln(2^{x^2}) - \ln(2^{|x|}) - 1 > 0 & (2) \end{cases}$

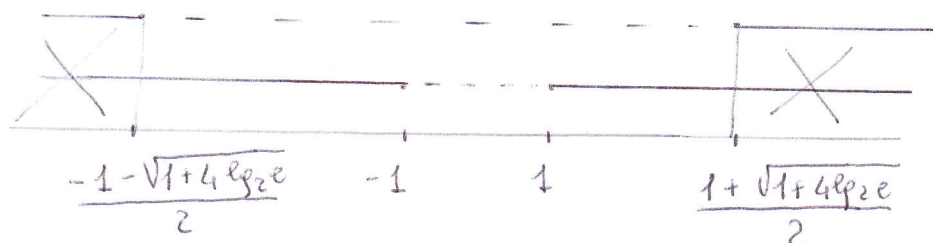
(1) $\Leftrightarrow e^{x^2} > e^{|x|} \Leftrightarrow x^2 > |x| \Leftrightarrow |x|^2 > |x| \Leftrightarrow |x| < 0 \vee |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

(2)

$$1 \times \frac{1}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4g_2 e}}{2}$$

$$|x\rangle \left\langle \frac{1 - \sqrt{1 + 4q_2}}{2} e \right| x \rangle \left| \frac{1 + \sqrt{1 + 4q_2}}{2} e \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-1 - \sqrt{1 + 4 \lg_2 e}}{2} \vee x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \lg_2 e}}{2}$$



$$ID = \left(-\infty, -\frac{1+\sqrt{1+4q_2e}}{2} \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1+4q_2e}}{2}, +\infty \right)$$

è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{0^-} e^{-\infty} = -\infty \cdot 0 = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{0^+} e^{+\infty} = +\infty$$

porque $e^y \rightarrow 0$ per $y \rightarrow -\infty$ un 0% de electrones

$x = 1$ A vertical submanifold

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x e^{\frac{x}{x}} = \pm \infty \quad \text{Asymptote: } 0 \text{ bzw. } \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\cancel{x} e^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{x-1}{x}} = 1 \cdot e = e \quad (\text{eventuelle Koeffiziente})$$

(eventuale coefficiente
angolare dell'assintoto obliquo)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ex = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}} - ex = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} ex \left(\frac{x}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}-1} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^x \left(\frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x}{x-1} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^x \frac{x^2 - (x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^x \frac{x^2 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^x \frac{2x^2}{x^2} = 2e$$

$$y = ex - 2e$$

Ar. obliquo $\alpha \neq \infty$.

4. $g(x) = x + \ln\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right)$ ID: $\frac{x^2}{|x-1|} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1$ ID = $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

Non si riesce a studiare la monotonia della funzione, che si dedurrà a posteriori dopo averne disegnato il grafico.

Asintoti verticali

$\lim_{x \rightarrow 0} x + \ln\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln y = -\infty$ $x=0$ A.V.

$\lim_{x \rightarrow 1} x + \ln\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$ $x=1$ A.V.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = -\infty + 0 = -\infty$ per gli ordini

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = +\infty + 0 = +\infty$ A as. obliquo a $\pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{\ln\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right)}{x} = 1 + 0$ per gli ordini

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = +\infty$ A as. obliquo a $\pm\infty$

$y' = 1 + \frac{|x-1|}{x^2} \cdot \frac{2x|x-1| - x^2|x-1|}{|x-1|^2} = 1 + \frac{x|x-1|(2x-2-x)}{x^2(x-1)^2}$

$= 1 + \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x^2-2}{x^2-x}$ $\forall x \neq 0, 1$

ID(y') = ID(y)

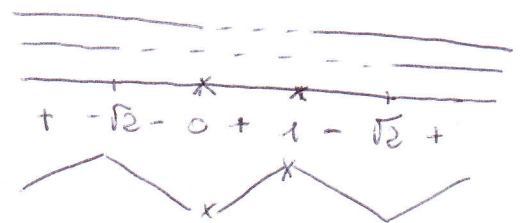
A pt. angoloso o cuspidale

$y' > 0$ $N > 0$ $x^2 - 2 > 0$ $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$

$D > 0$ $x^2 - x > 0$ $x < 0 \vee x > 1$

g cresce in $(-\infty, -\sqrt{2}]$, in $[0, 1[$ e in $[\sqrt{2}, +\infty)$

decresce in $]-\sqrt{2}, 0[$ e in $]1, \sqrt{2}[$



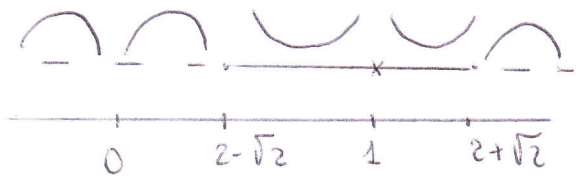
M $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right) \end{cases}$

m $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right) \end{cases}$

$y'' = D\left(\frac{x^2-2}{x^2-x}\right) = \frac{2x(x^2-x) - (2x-2)(x^2-2)}{(x^2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-2}{(x^2-x)^2}$

$y'' > 0 \Leftrightarrow -x^2+4x-2 > 0$ $1-2\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$ $x \neq 1$

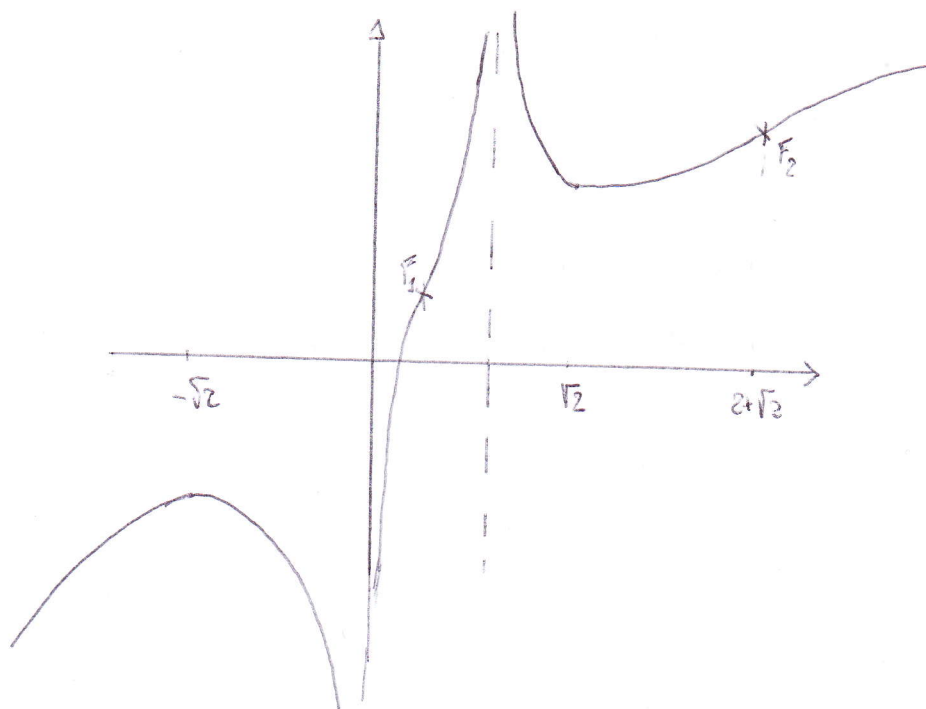




g convessa in $]2-\sqrt{2}, 1[$ e in $]1, 2+\sqrt{2}[$

concava in $(-\infty, 0[$ e in $]0, 2-\sqrt{2}[$ e in $]2+\sqrt{2}, +\infty[$

Circolo due flessi: $F_1 \begin{cases} x = 2-\sqrt{2} \\ y = g(2-\sqrt{2}) \end{cases}$ $F_2 \begin{cases} x = 2+\sqrt{2} \\ y = g(2+\sqrt{2}) \end{cases}$



5. i) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^3 x - 1} dx = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^3 x - 1} dx = 2 \int \frac{t}{t^3 - 1} dt =$ $\sin x = t \quad \cos x dx = dt$

$$\frac{t}{t^3 - 1} = \frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1} = \frac{(A+B)t^2 + (A-B+C)t + A-C}{(t-1)(t^2+t+1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A+A+A=1 \\ C=A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{3} \\ A=\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

L'integrale diventa:

$$= 2 \int \frac{1/3}{t-1} dt - 2 \int \frac{\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}}{t^2+t+1} dt = \frac{2}{3} \ln |t-1| + \frac{2}{3} \int \frac{2t+t-3}{t^2+t+1} dt =$$

$$= \frac{2}{3} \ln |t-1| - \frac{1}{3} \ln(t^2+t+1) + \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{1}{3} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{3} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{(\sin x - 1)^2}{\sin^2 x + \sin x} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2(\sin x) + 1}{\sqrt{3}} + C$$

ii) Poiché h è continua $\forall x$ $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, h è continua in $[0, 1]$ e quindi integrabile in senso classico e in senso improprio.

Diciamo che h è continua in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ma

(5)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin 2x}{\sin^3 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + \sin x + 1} \cdot \frac{\cos x}{\sin x - 1} = +\infty \text{ con ordine 1}$$

perché $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + \sin x + 1} = \frac{2}{3}$ mentre

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sin x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{2})}{\sin(y + \frac{\pi}{2}) - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\sin y}{\sin y - 1} = \begin{cases} \text{per } y \rightarrow 0^+; \\ \sin y \sim y \\ 1 - \cos y \sim \frac{1}{2} y^2 \end{cases}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-y}{-\frac{y^2}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2}{y} = +\infty \text{ con ordine 1.}$$

Si conclude che, per il criterio di integrabilità dell'ordine di infinito,

la funzione non è integrabile in senso improprio in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.