

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

17 febbraio 2023

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$z^3 = |z| i + \left(\frac{\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)}{\cos \frac{13\pi}{10} + i \sin \frac{13\pi}{10}} \right)^5 + (i)^{285}.$$

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \left(\frac{\ln^2 x^2 - \ln |x| - 2}{4^x - 2^{x+1}} \right)^\pi + \sin \frac{1}{x-1}.$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x + \ln^2 x - \tan^2 x}{x^2 \sin 3x}.$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = \arcsin \frac{2}{e^{x-1} + e^{x+1}}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1}{x(x-1)\sqrt{x^2-4}},$$

i) calcolarne l'integrale indefinito;

ii) Dire, giustificando la risposta, se la funzione è integrabile in senso improprio negli intervalli $[2, 3]$ e $[3, +\infty)$.

$$1. z^3 = |z| i + \left(\frac{(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})(\cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi)^5}{\cos \frac{13}{10}\pi + i \sin \frac{13}{10}\pi} \right)^5 + (i)^{285}$$

Poiché $\left(\frac{(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})(\cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi)^5}{\cos \frac{13}{10}\pi + i \sin \frac{13}{10}\pi} \right)^5 = \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{3}{5}\pi - \frac{13}{10}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{3}{5}\pi - \frac{13}{10}\pi \right) \right)^5$

$$= \cos \left(-\frac{5}{10} \cdot 8\pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{10} \cdot 8\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -i$$

$$i^{285} = i^{4 \cdot 81 + 1} = (i^4)^{81} \cdot i = i, \text{ e' equazione di Bernoulli}$$

$$z^3 = |z| i + i + i$$

Posto $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ in $\mathbb{R}_n$

$$\rho^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \rho i \quad \text{ma } i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ e quindi}$$

$$\rho^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \rho (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

L'equazione ha 4 soluzioni: $z = 0$,

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$z_1 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi \right) = -i$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \left(\frac{\ln^2 x^2 - \ln|x| - 2}{4^x - 2^{x+1}} \right)^n + \sec \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln^2 x^2 - \ln|x| - 2}{4^x - 2^{x+1}} \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$n \geq 0$$

Poiché $\ln^2 x^2 = (\ln x^2)^2 = (2 \ln|x|)^2 = 4 \ln^2|x|$
basta studiare

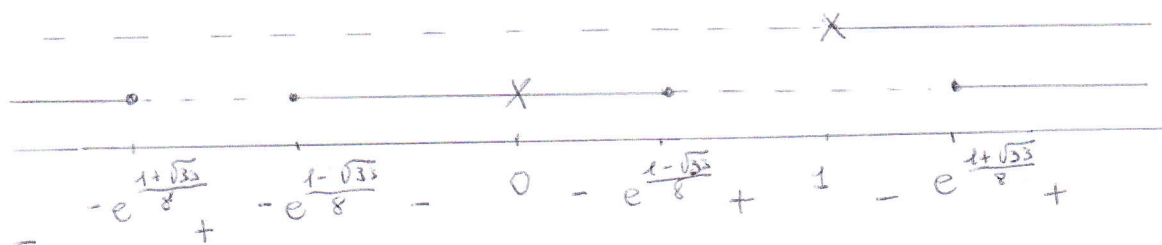
$$4 \ln^2|x| - \ln|x| - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln|x| \leq \frac{1-\sqrt{33}}{8} \vee \ln|x| \geq \frac{1+\sqrt{33}}{8}$$

$$\Leftrightarrow 0 < |x| \leq e^{\frac{1-\sqrt{33}}{8}} \vee |x| \geq e^{\frac{1+\sqrt{33}}{8}} \Leftrightarrow -e^{\frac{1-\sqrt{33}}{8}} \leq x \leq e^{\frac{1-\sqrt{33}}{8}} \wedge x \neq 0 \vee$$

$$x \leq -e^{\frac{1+\sqrt{33}}{8}} \vee x \geq e^{\frac{1+\sqrt{33}}{8}}$$

$$\Delta > 0 \quad 4^x - 2^{x+1} > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{x+1} \Leftrightarrow 2x > x+1 \Leftrightarrow x > 1$$



$$ID = \left[-e^{\frac{1+\sqrt{3}}{8}}, -e^{\frac{1-\sqrt{3}}{8}}\right] \cup \left[-e^{\frac{1-\sqrt{3}}{8}}, 1\right] \cup \left[e^{\frac{1+\sqrt{3}}{8}}, +\infty\right)$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x + \ln^2 x - \sqrt{x^2}}{x^2 \sin 3x} = \frac{0 + \infty}{0} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ * Osservo che per decidere il segno dell'infinito dovrei studiare il segno del

denominatore: poiché la funzione è definita per $x > 0$ a causa del $\lg^2 x$, il limite si può fare solo da destra dove $\sin 3x > 0$.

4. Studiare la funzione $g(x) = \arcsin \frac{2}{e^{x-1} + e^{x+1}}$ e disegnare il grafico approssimativo.

Poiché $e^{x-1} + e^{x+1} = \frac{1}{e} e^x + e \cdot e^x = \frac{1+e^2}{e} \cdot e^x$, posso riscrivere la funzione nella forma

$$g(x) = \arcsin \frac{2}{\frac{1+e^2}{e} e^x} \quad \text{cioè} \quad g(x) = \arcsin \frac{2e}{1+e^2} \cdot e^{-x}$$

$$ID: -1 \leq \frac{2e}{1+e^2} e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow 2e e^{-x} \leq 1+e^2 \Leftrightarrow e^{-x} \leq \frac{1+e^2}{2e} \Leftrightarrow -x \leq \ln \frac{1+e^2}{2e} \Rightarrow x \geq -\ln \frac{1+e^2}{2e}$$

$\downarrow$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ poiché $e^{-x} > 0$ sempre

Per $\begin{cases} x=0 \\ y = \arcsin \frac{2e}{1+e^2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ \arcsin \frac{2e}{1+e^2} e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2e}{1+e^2} e^{-x} = 0 \end{cases} \quad \nexists$

$$\begin{cases} x = -\ln \frac{1+e^2}{2e} \\ y = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(-\ln \frac{1+e^2}{2e}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ pto iniziale del grafico}$$

Per $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{2e}{1+e^2} e^{-x} = \arcsin 0 = 0 \quad y=0 \text{ Asint. orz. a } +\infty$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2e}{1+e^2} e^{-x}\right)^2}} \cdot \frac{2e}{1+e^2} (-1) \quad \forall x \in ID \Rightarrow 1 - \left(\frac{2e}{1+e^2} e^{-x}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < \frac{2e}{1+e^2} e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > -\ln \frac{1+e^2}{2e}$$

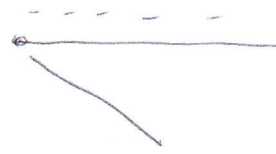
$\downarrow$
 $\forall x$

Perché lim $x \rightarrow -\ln \frac{1+e^2}{2}$ $y' = \frac{1}{0^+} \frac{2e}{1+e^2} (-1) = -\infty$, $x = -\ln \frac{1+e^2}{2}$ pto di
senza cuspidate.

3

La funzione parte con tangente verticale, decrescente e si volta verso l'alto.

Inoltre $y' > 0 \Leftrightarrow -\frac{2e}{1+e^2} > 0 \quad \phi$ cioè



La funzione è stz decrescente nel suo dominio

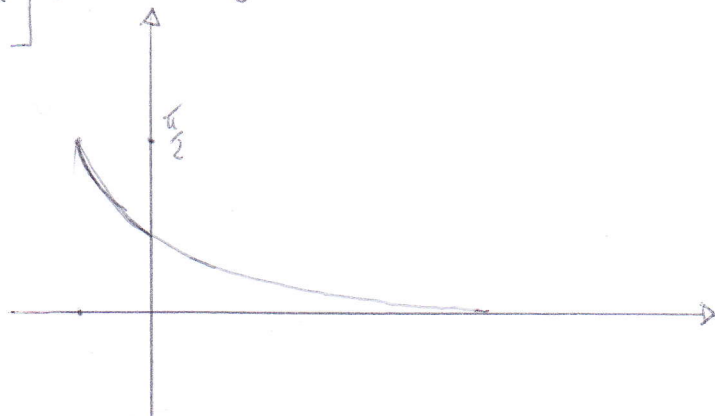
$(-\ln \frac{1+e^2}{2}, \frac{1}{2})$ pto di massimo assoluto.

Si intuisce che la funzione sarà sempre convessa. Volendo, calcoliamo la derivata seconda. Perché

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2e}{1+e^2}\right)^2 e^{-2x}}} \left(-\frac{2e}{1+e^2}\right) \Rightarrow y'' = + \frac{2e}{1+e^2} \frac{4e}{2\sqrt{1 - \left(\frac{2e}{1+e^2}\right)^2 e^{-2x}}} \cdot \left(\frac{2e}{1+e^2}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{2e}{1+e^2}\right)^2 e^{-2x}}$$

$$\Rightarrow y'' = \left(\frac{2e}{1+e^2}\right)^3 \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2e}{1+e^2}\right)^2 e^{-2x}\right]^{3/2}} \quad y'' > 0 \quad \forall x \in I \Delta$$

segue che y è sempre
convessa.



5. i)

• Posto $\sqrt{x^2-4} = x+t \quad \forall Ra \quad x^2-4 = x^2+t^2+2tx \Rightarrow x = -\frac{t^2+4}{2t}$
 $dx = -\frac{1}{2} \frac{2t^2-t^2-4}{t^2} dt = -\frac{t^2-4}{2t^2} dt$

Sostituendo nell'integrale $\forall Ra$

$$\int \frac{1}{-\frac{t^2+4}{2t} \left(-\frac{t^2+4}{2t}-1\right) \left(-\frac{t^2+4}{2t}+t\right)} \cdot \frac{4-t^2}{2t^2} dt = \int \frac{-(t^2-4)}{\frac{t^2+4}{2t} \cdot \frac{t^2+2t+4}{2t} \cdot \frac{t^2-4}{2t}} dt$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{t}{(t^2+4)(t^2+2t+4)} dt \quad \text{Per le formule di Heurte}$$

$\exists A, B$ costanti $\forall t$.

$$\frac{t}{(t^2+4)(t^2+2t+4)} = \frac{At+B}{t^2+4} + \frac{Ct+D}{t^2+2t+4} = \frac{(A+B)(t^2+2t+4) - (t^2+4)(Ct+D)}{(t^2+4)(t^2+2t+4)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-D=0 \\ 4A+2B-4C=1 \\ 4B-4D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=A \\ 2A=0 \\ B=\frac{1+4C}{2} \\ D=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=0 \\ A=0 \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Si trova dunque
all'integrale

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t^2+4} + \frac{\frac{1}{2}}{t^2+2t+4} \right) dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2+1\right)} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{3\left[\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} dt = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2-4}-x}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2-4}-x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

ii) la funzione integranda è definita per

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$

In $]2,3]$ la funzione è continua e

Essa $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x(x-1)\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}} = +\infty$ con ordine $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ è integrabile
in s.i. in $]2,3]$.

In $[3, +\infty)$ la funzione è continua e

Essa $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x-1)\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = 0$ con ord $3 > 1$

$\Rightarrow$ è integrabile in $[3, +\infty)$.