

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

10 dicembre 2022

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^2 + \operatorname{Re}(z^2) + \operatorname{Im}(z^2) = |z - 1| + i^{320} - \left(\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15}} \right)^{30}.$$

2. Studiare il dominio della funzione

$$y = \log_{0,3} \left(\frac{\ln^2 x^2 - 4 \ln |x| + 1}{\sqrt{x^2 - x} - x - 1} \right).$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)^4}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \log_2 \left(1 + \frac{x}{|x - 1|} \right) - 1$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2 \right)^2 \sqrt[3]{x^2}}$$

- i) calcolare

$$\int g(x) dx;$$

- ii) studiare l'integrabilità in senso improprio di g in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty]$.

Soddisimento

1. Posto $z = x + iy$ si ha $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $z - 1 = x - 1 + iy$ e quindi

$$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \quad \operatorname{Im}(z^2) = 2xy \quad |z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Im}(z^2) = 2xy = 0 \Rightarrow i^{320} = (i^4)^{80} = 1^{80} = 1,$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{30} = \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15} \right) \right)^{30} = \cos \left(\frac{4}{15} \pi \cdot 30 \right) + i \sin \left(\frac{4}{15} \pi \cdot 30 \right) \\ = \cos 8\pi + i \sin 8\pi = 1.$$

L'equazione diventa

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 - y^2 + 2xy = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + i - i \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 + 2xy = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ 2xy = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} -2y^2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Il 1° sistema è impossibile poiché lo è l'equazione $-2y^2 = \sqrt{1+y^2}$

essendo $-2y^2 \leq 0$ mentre $\sqrt{1+y^2} \geq 1 > 0$. Risolvo il 2° sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 = |x-1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - x + 1 = 0 \\ \Delta < 0 \quad \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \\ x_2 = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 < 1 \\ \frac{1}{2} < 1 \end{cases} \text{ acc.} \end{cases}$$

Dunque il 2° sistema ha due soluzioni $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ e quindi

l'equazione ha 2 soluzioni reali $z = -1$ e $z = \frac{1}{2}$.

$$2. \quad \frac{\ln^2 x^2 - 4 \ln |x| + 1}{\sqrt{x^2 - x} - x - 1} > 0$$

applico le regole del segno
nel campo di esistenza
della frazione

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

$$N > 0 \quad \ln^2 x^2 - 4 \ln |x| + 1 > 0 \Leftrightarrow 4 \ln^2 |x| - 4 \ln |x| + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

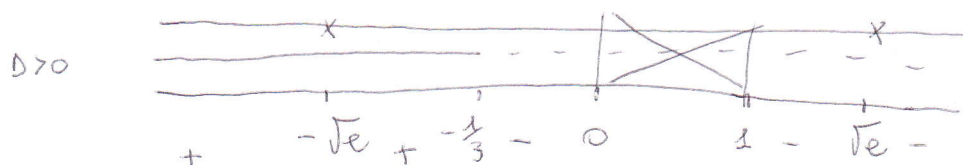
$$(\text{essendo } \ln^2 x^2 = (\ln x^2)^2 = (2 \ln |x|)^2 = 4 \ln^2 |x|)$$

$$(2 \ln |x| - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 2 \ln |x| - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln |x| \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm e^{\frac{1}{2}}$$

$$D > 0 \quad \sqrt{x^2 - x} > x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x > (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x > x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \vee \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \vee -1 \leq x < -\frac{1}{3}$$

cioè $\Delta > 0$ per $x < -\frac{1}{3}$



$$ID = (-\infty, -\sqrt{e}] \cup [-\sqrt{e}, -\frac{1}{3}]$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}) \ln(1 + \frac{1}{x})}{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^4} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^+ \\ \frac{1}{x} = y}} \frac{(y - \sin y) \ln(1 + y)}{(e^y - 1)^4} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(y - y + \frac{y^3}{6} + o(y^4))(y + o(y))}{(y + o(y))^4}$$

poiché $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$

$\ln(1 + y) = y + o(y)$

$e^y - 1 = y + o(y)$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y^4}{6} + o(y^4)}{(y + o(y))^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y^4}{6}}{y^4} = \frac{1}{6}$$

Trascurvo gli infinitesimi di ordine superiore

$$4. f(x) = \log_2 \left(1 + \frac{x}{|x-1|} \right) - 1$$

$ID = \mathbb{R} - \{1\}$ poiché

$$ID: 1 + \frac{x}{|x-1|} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1+x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ -x+1+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \neq 1$$

Intersezioni con assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \log_2 1 - 1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \log_2 \left(1 + \frac{x}{|x-1|} \right) = 1 \Rightarrow 1 + \frac{x}{|x-1|} = 2 \Rightarrow \frac{x}{|x-1|} = 1 \end{cases}$$

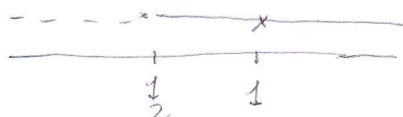
$(0, -1) \quad (\frac{1}{2}, 0)$

$$x = |x-1| \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > x-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x = -x+1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ acc}$$

Positività

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_2 \left(1 + \frac{x}{|x-1|} \right) > 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{|x-1|} > 2 \Leftrightarrow \frac{x}{|x-1|} > 1 \Leftrightarrow x > |x-1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > x-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x > -x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee \frac{1}{2} < x < 1$$



f è positiva per $x > \frac{1}{2}$ e $x \neq 1$

f è negativa per $x < \frac{1}{2}$

Asintoti

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left(1 + \frac{x}{|x-1|} \right) - 1 = \lim_{y \rightarrow +\infty} (\log_2 y - 1) = +\infty \quad x=1 \quad \text{As. Vert. completo}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(1 + \frac{x}{|x-1|} \right) - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(1 + \frac{x}{x-1} \right) - 1 = \log_2 2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$y=0$ As. obliquo $a + \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2 \left(1 + \frac{x}{|x-1|} \right) - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2 \left(1 - \frac{x}{x-1} \right) - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2 \left(\frac{-1}{x-1} \right) - 1 = -\infty$$

As. obliquo $a - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \left(1 + \frac{x}{|x-1|} \right) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\log_2 (1-x) - 1}{x} = 0$$

As. obliquo $a - \infty$ (per gli ordini)

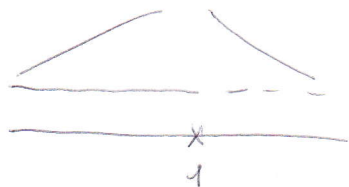
Studio delle derivate prime

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{|x-1|} \right) \log 2} \cdot \frac{|x-1| - x + \frac{x-1}{|x-1|}}{(x-1)^2} = \frac{|x-1|}{(1-x-1+x) \log 2} \cdot \frac{(x-1)^2 x (x-1)}{|x-1| (x-1)^2} \quad \forall x \neq 1$$

Alti angolari o cuspidali essendo $ID(y') = ID(y)$

$$y' = \frac{x-1-x}{(|x-1|+x) \log 2} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)(|x-1|+x) \log 2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ (x-1)(x+1+x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ x-1+x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



f cresce strettamente in $(-\infty, 1)$

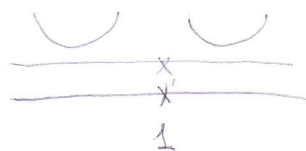
f decresce stc. in $(1, +\infty)$

Provo a studiare la derivata seconda

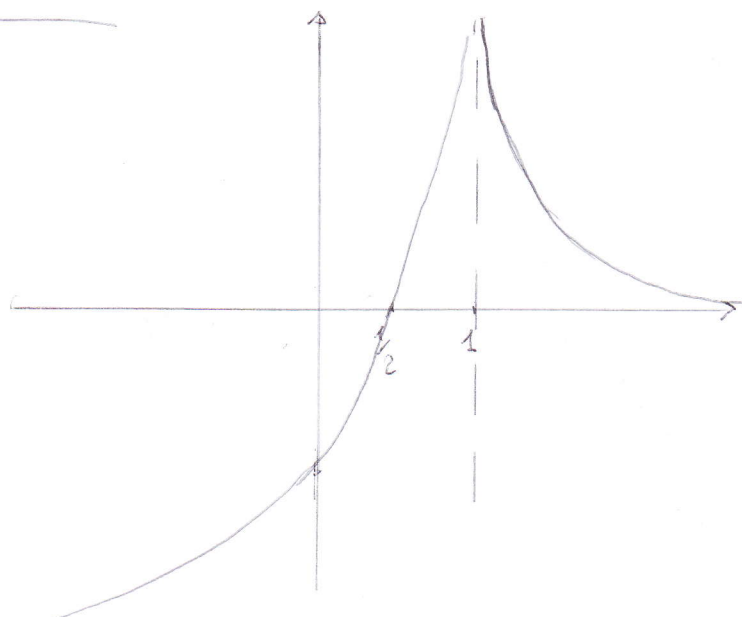
$$y'' = \begin{cases} \left(-\frac{1}{(x-1)(2x-1) \log 2} \right)' & \text{se } x > 1 \\ \left(\frac{1}{(x-1) \log 2} \right)' & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{\log 2} \frac{2x-1+2(x-1)}{(x-1)^2 (2x-1)^2} & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{\log 2} \frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 4x - 3 > 0 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4} \vee x < 1$$



f è convessa in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$



$$5.i) \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2)^2 \sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{1}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt$$

posto $\sqrt[3]{x^2} = t$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx = dt$$

$$= \int \frac{dr}{[(t+1)^2 + 1]^2} = \int \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz =$$

posto $t+1 = z \Rightarrow dt = dz$

Applico formula di Hermite:

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{Az + B}{z^2 + 1} + \frac{d}{dz} \frac{Cz + D}{z^2 + 1} = \frac{Az + B}{z^2 + 1} + \frac{Cz^2 + C - 2Cz^2 - 2Dz}{(z^2 + 1)^2} \Rightarrow$$

$$Az^3 + Az + Bz^2 + B - Cz^2 + C - 2Dz = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = C \\ -2D = 0 \\ B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow A = D = 0, B = C = \frac{1}{2}$$

$$= \int \frac{1/2}{z^2 + 1} dz + \int \frac{d}{dz} \frac{1/2}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2} \arctan z + \frac{1}{2} (z^2 + 1) = \frac{1}{2} \arctan(\sqrt[3]{x} + 1) + \frac{1}{2} ((\sqrt[3]{x^2} + 1)^2 + 1) + C$$

$$= \frac{1}{2} \arctan(\sqrt[3]{x} + 1) + \frac{1}{2} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2) + C.$$

ii) $ID(g): \sqrt[3]{x^2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ g è continua in $]0, 1[$ e in $[1, +\infty)$.

Studiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2)\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$ con ordine $\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow g$ è integr. in s.i. in $]0, 1[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2)\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = 0$ con ord. $\frac{4}{3} > 1 \Rightarrow g$ è integr. in s.i. in $[1, +\infty)$.