

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

13 ottobre 2022

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$|z|^4 z - 1 = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^{28}.$$

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \sqrt{\frac{2 \ln^3 x - \ln^2 x + 3 \ln x + 2}{e^{2x+1} - 2e^x + \frac{1}{e}}}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + 2)\sqrt{x^3 + x^2}}{x - \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sin x + 2)\sqrt{x^3 + x^2}}{x - \sin x}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} \ln x^2$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare l'area del rettangoloide di base $[1, e]$ relativo a f .
6. Dire, giustificando la risposta, se la funzione $\frac{1}{f(x)}$ è integrabile in senso improprio negli intervalli $]0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1[$ e $[2, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $\left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^{28} = \cos 28 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin 28 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi)$

e' equazione diventa $|z|^4 z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow$

$|z|^6 z = \bar{z}$ con $z \neq 0$

Se moltiplico ambo i membri per z , ricordando che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, si ha

$|z|^6 z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow |z|^4 z^2 = 1 \Leftrightarrow \rho^6 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1 (\cos 0 + i \sin 0)$
 dove $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^6 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : 2\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = k\pi \end{cases}$ cioè $\theta_0 = 0 \vee \theta_1 = \pi$

L'equazione ha 2 soluzioni $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, $z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

2. $\frac{2e^{3x} - e^{2x} + 3e^x + 2}{e^{2x+1} - 2e^x + \frac{1}{e}} \geq 0$

Applico la regola del segno per $x > 0$, dominio della frazione

$N \geq 0 \quad 2e^{3x} - e^{2x} + 3e^x + 2 \geq 0$ Posto $t = e^x$ si ha

$2t^3 - t^2 + 3t + 2 \geq 0$ che ha radice $-\frac{1}{2}$ come si vede subito sostituendo nel polinomio. Segue che

$2t^3 - t^2 + 3t + 2 = (t + \frac{1}{2})(2t^2 - 2t + 4)$

Poiché $2t^2 - 2t + 4 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ avendo $\Delta < 0$, $-\frac{1}{2} \mid \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ & -1 & +1 & -2 \\ \hline 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}$

si conclude che $2t^3 - t^2 + 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\frac{1}{2}$ e quindi

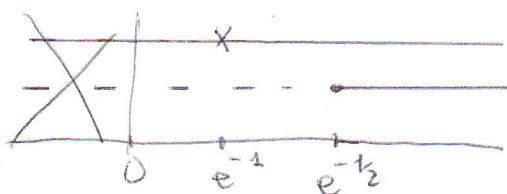
$N \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$

$D > 0 \Leftrightarrow \frac{2e^{3x} - e^{2x} + 3e^x + 2}{e^{2x+1} - 2e^x + \frac{1}{e}} > 0 \Leftrightarrow e \cdot e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{e} > 0$

Posto $e^x = t$: $\Delta = 0$ nel trinomio associato, $t_{1/2} = \frac{1 \pm 0}{e} = e^{-1}$
 e quindi

$D > 0 \Leftrightarrow (e^x - e^{-1})^2 > 0 \Leftrightarrow e^x \neq e^{-1} \Leftrightarrow x \neq -1$

$D > 0$
 $N \geq 0$



Conclusione: la funzione è definita
 $\forall x \in [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + 2)\sqrt{x^3 + x^2}}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 2) \frac{\sqrt{x^3 + x^2}}{x - \sin x} =$

trascuro x^3 di la ord. $\approx 3 > 2 = \text{ord } x^2$
Per Taylor: $x - \sin x = x - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
Dunque $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots}{\dots} = \pm \infty$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x + 2) \frac{\sqrt{x^2}}{\frac{1}{6}x^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sin x + 2)\sqrt{x^3 + x^2}}{x - \sin x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ per gli ordini

poiché $\sin x + 2 \geq -1 + 2 = 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + 2)\sqrt{x^3 + x^2} = +\infty$

con $(\sin x + 2)\sqrt{x^3 + x^2}$ di ordine $\frac{3}{2}$.

Il denominatore invece tende a $+\infty$ con ordine 1 poiché trascuro la quantità $\sin x$ che è eliminata

4. $f(x) = \sqrt{|x|} \ln x^2$ si osserva che $\ln x^2 = 2 \ln |x|$ e quindi

$f(x) = 2\sqrt{|x|} \ln |x|$ $ID: \begin{cases} |x| \geq 0 & \forall x \\ |x| > 0 & \forall x \neq 0 \end{cases}$ $ID = \mathbb{R}^*$

f è pari poiché $\forall x \in ID: f(-x) = f(x)$.

Per $y = 0 \Rightarrow 2\sqrt{|x|} \ln |x| = 0 \Rightarrow |x| = 0 \vee \ln |x| = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ non acc. $\vee |x| = 1$ cioè $x = \pm 1$ $(1, 0) (-1, 0)$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{|x|} \ln |x| \geq 0 \Rightarrow \ln |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \cdot (-\infty) = 0$ per gli ordini essendo $\ln |x|$ per $x \rightarrow 0$ un infinito comunque lento

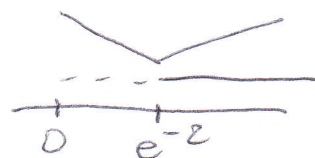
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{|x|} \ln |x| = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ $\nexists$ Asintoti

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x} \cdot \ln |x| = 0 \cdot (-\infty) = 0$ per gli ordini
 $\hookrightarrow 0$ per gli ordini

Dunque $\nexists$ asintoti di alcun tipo. Studio ora la derivata prima.
Poiché f è pari, mi limito al caso $x > 0$ cioè derivo $2\sqrt{x} \cdot \ln x$.

$$D(2\sqrt{x} \ln x) = 2 \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right] = 2 \frac{\sqrt{x} \ln x + 2\sqrt{x}}{x} = 2 \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} (\ln x + 2) \quad (3)$$

Segno di $y' > 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-2}$



in $\begin{cases} x = e^{-2} \\ y = 2\sqrt{e^{-2}} \cdot \ln e^{-2} = -\frac{4}{e} \end{cases}$

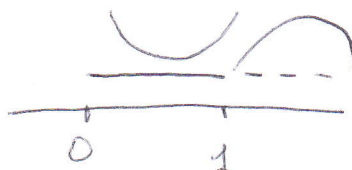
Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{x}} (\ln x + 2) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Studio il segno di f'' sempre per $x > 0$.

$$f''(x) \triangleq f'(x) = D \left(2 \frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}} \right) = 2 \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}}{x} = 2 \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x}}{2x^2}$$

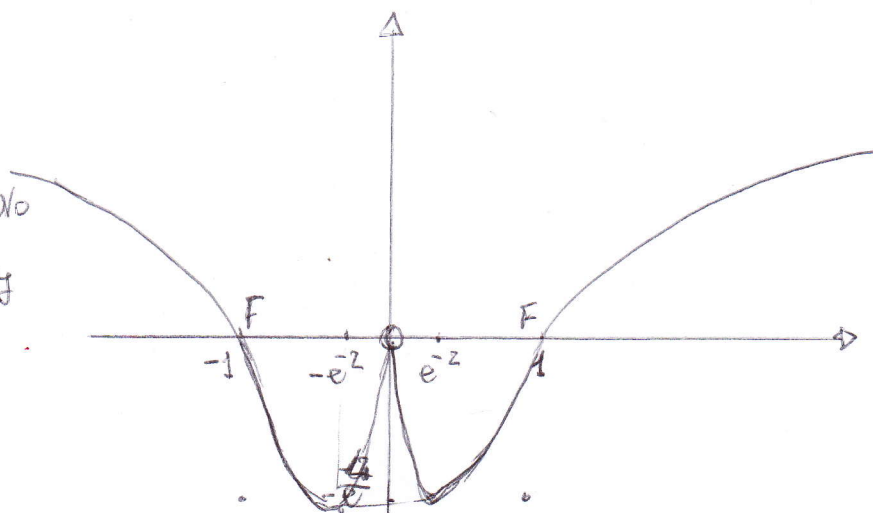
$$= -\frac{\sqrt{x}}{x^2} \cdot \ln x$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$



E $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Disegno f_f per $x > 0$ e più ribello rispetto all'asse y



5. Poiché f è positiva per $x \geq 1$, per calcolare l'area del rettangolo lorde di base $[1, e]$ relativo a f basta trovare

$$\int_1^e f(x) dx = 2 \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = 2 \int_1^e \left(D \frac{x^{3/2}}{3/2} \right) \ln x dx \quad \text{p.p.}$$

Il log ha il valore assoluto perché $x > 0$

$$= 2 \left(\left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} dx \right)$$

$$= 2 \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} \right]_1^e = 2 \left(\frac{2}{3} \sqrt{e^3} - \frac{4}{9} \sqrt{e^3} + \frac{4}{9} \right) = \frac{8}{9}. \quad (4)$$

6. Poiché $\frac{1}{f(x)}$ è definita per $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$, calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x} \ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{con ordine di infinitesimo} = \text{ordine di infinitesimo di } f(x) \text{ dove } \text{ord } f < \frac{1}{2} < 1$$

Segue che $\frac{1}{f}$ è integrabile in s.i. in $]0, \frac{1}{2}]$ perché continua ed infinita per $x \rightarrow 0^+$ con ordine $< \frac{1}{2} < 1$.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{con ordine} = \text{ord di infinitesimo di } 2\sqrt{x} \ln x = \text{ord}(\ln x) = 1 \text{ per } x \rightarrow 1$$

segue che $\frac{1}{f}$ non è integrabile in s.i. in un intorno di 1 equivalentemente $[\frac{1}{2}, 1[$.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x} \ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{con ord } > \frac{1}{2} \text{ ma } < \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

segue che $\frac{1}{f}$ non è integrabile in $[2, +\infty)$ essendo $\frac{1}{f} \rightarrow +\infty$

infinitesimo di ordine < 1 (si osserva che $\sqrt{x} \ln x$ ha ordine

$$< \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \text{poiché} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0)$$