

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

20 giugno 2022

1. Risolvere la seguente equazione nel piano complesso

$$z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0.$$

2. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \lg_{0,5} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{2^{2x} - 2^{x+1} - 3} \right).$$

3. Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \ln(\cos x)}{x^\alpha}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x \exp \left(-\frac{1}{|x-1|} \right).$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x + \sqrt[3]{1-x}} dx.$$

6. Denotata con $\alpha \in (-1, 0)$ l'unica radice reale dell'equazione $x + \sqrt[3]{1-x} = 0$, studiare l'integrabilità della funzione dell'esercizio precedente in $(-\infty, -2]$, $[-2, \alpha)$ e $[0, 2]$.

Svolgimento

1. Ricordando che $z^3 \bar{z} = z^2 \cdot z \cdot \bar{z} = z^2 \cdot |z|^2$ e posto $z = a+ib$ l'equazione diventa $z^2 \cdot |z|^2 + 3z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (a+ib)^2(a^2+b^2+3) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 2abi - b^2)(a^2 + b^2 + 3) - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{(separando parte reale e} \\ \text{parte immaginaria)} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 3) - 4 = 0 \\ 2ab(a^2 + b^2 + 3) = 0 \end{cases}$$

Perché la 2^a equazione è soddisfatta se $a=0 \vee b=0 \vee a^2+b^2=3 \notin \mathbb{R}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} a=0 \\ -b^2(b^2+3)-4=0 \end{cases} \vee \begin{cases} b=0 \\ a^2(a^2+3)-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b^4+3b^2+4=0 \end{cases} \notin \vee \begin{cases} b=0 \\ a^4+3a^2-4=0 \end{cases} \quad a_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{matrix} -4 \text{ imp.} \\ 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} b=0 \\ a=\pm 1 \end{matrix}$$

Il sistema ha solo 2 sol. $(+1, 0), (-1, 0)$
 $\Leftrightarrow$ l'equazione ha solo 2 sol. $z_{\frac{1}{2}} = \pm 1$.

$$2. \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{2^{2x}-2^{x+1}-3} > 0 \\ x^2+2x \geq 0 \\ 2^{2x}-2^{x+1}-3 \neq 0 \end{cases}$$

$$x \leq -2 \vee x \geq 0$$

$$2^{2x}-2 \cdot 2^x-3 \neq 0$$

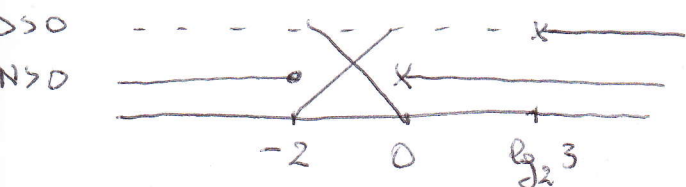
$$2^x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \log_2 3$$

$$2^{\frac{x}{2}} = 1 \pm 2 = \begin{matrix} -1 \text{ non acc.} \\ 3 \end{matrix}$$

Applico ora la regola del segno alla 1^a disuguaglianza:

$$N > 0 \quad \sqrt{x^2+2x} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x \geq 0 \\ x < 0 \\ x \leq -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+2x > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x \leq -2 \vee x > 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$\Delta \Delta 0 \quad 2^{2x}-2 \cdot 2^x-3 > 0 \Leftrightarrow 2^x < -1 \vee 2^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_2 3$$



$$ID =] \log_2 3, +\infty)$$

3. Poiché usando lo sviluppo di $\cos x$ si ha

$$\lg(\cos x) = \lg\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

mentre per lo sviluppo del logaritmo

$$\lg(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

segue che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 + \lg(\cos x) &= \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ &= \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si conclude che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \lg(\cos x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{12}x^4}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 4 \\ -\frac{1}{12} & \alpha = 4 \\ -\infty & \alpha > 4 \end{cases}$$

4. $f(x) = x e^{-\frac{1}{|x-1|}}$ ID $x \neq 1$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \quad (0,0) \text{ unico pto di intersezione con gli assi}$$

$y > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (poiché la funzione esponenziale è sempre > 0)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{essendo } \lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^y = 0 \quad \begin{cases} y \rightarrow -\infty \end{cases}$$

La funzione è prolungabile per continuità in $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty \quad \text{essendo } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^y = e^0 = 1 \quad \begin{cases} y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 1 \quad (\text{eventuale coeff. angolare as. obliquo})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{-\frac{1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x-1}} - 1}{-\frac{1}{x-1}} = -1 \\ &\quad y = x-1 \quad \text{As. ob. a } +\infty \end{aligned}$$

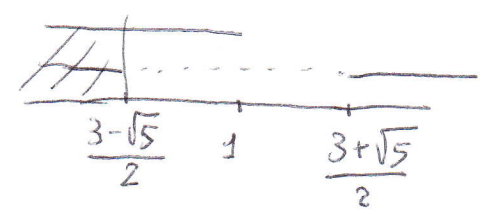
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{e^{\frac{1}{x-1}}} \right) = 1 \\ &\quad y = x+1 \quad \text{As. ob. a } -\infty \end{aligned}$$

$$y' = e^{-\frac{1}{|x-1|}} + x e^{-\frac{1}{|x-1|}} \left(-\frac{x-1}{|x-1|^2} \right) = e^{-\frac{1}{|x-1|}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{|x-1|} \right) \quad \forall x \neq 1$$

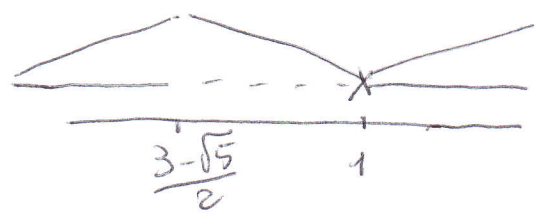
$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ \frac{x^2-3x-1}{(x-1)^2} > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$N > 0 \quad x^2 - 3x - 1 > 0 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$D > 0 \quad (x-1)^2 > 0 \quad \forall x \neq 1$$



Conclusioni: $y' > 0 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$



$$M \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ pto di minimo per la funzione

ottenuta prolungando x conti-
nuare la f in $x=1$

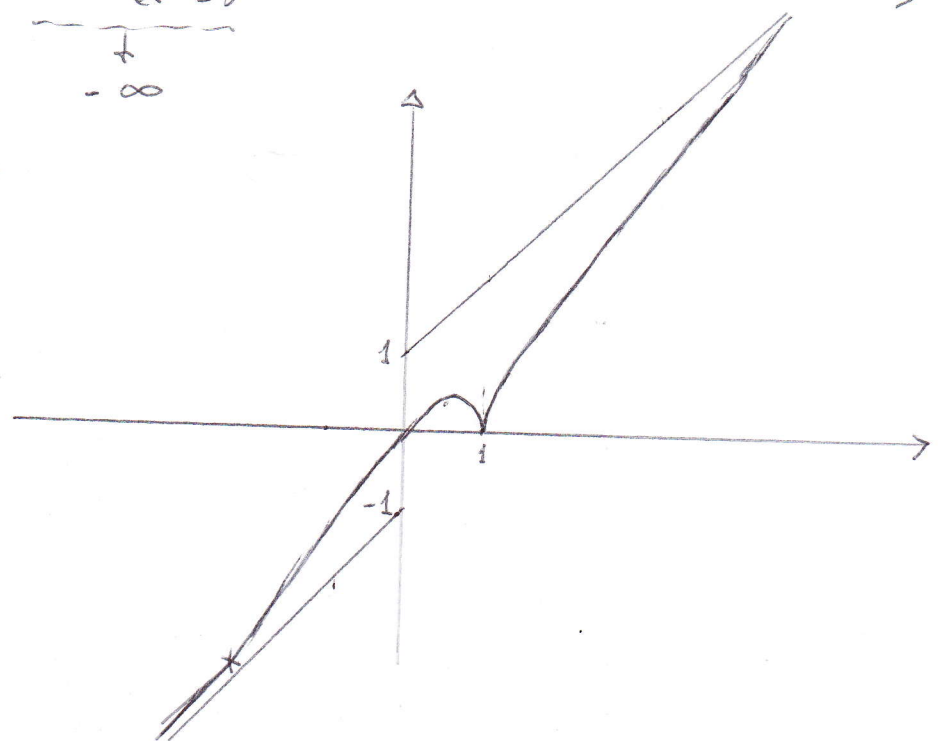
Tracce

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) = +\infty \quad \text{per ordini}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2} \right) = -\infty \quad \text{per ordini}$$

$\Rightarrow x=1$ pto di
cuspidale per il
prolungamento

Non si studia per brevità il segno
di y'' ma si intuisce che esiste
un flesso prima di 0.



5. Posto $1-x = t^6$ $0 = m.c.m. \{2,3\}$ si ha $x = 1-t^6 \Rightarrow dx = -6t^5 dt$

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x + \sqrt[3]{1-x}} dx = \int \frac{t^3}{-t^6 + 1 + t^2} (-6t^5 dt) = -6 \int \frac{t^8}{t^6 - t^2 - 1} dt =$$

$$-6 \int \left(t^2 + \frac{t^4 + 1}{t^6 - t^2 - 1} \right) dt = -6 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \int \frac{t^4 + 1}{t^6 - t^2 - 1} dt$$

$$\frac{t^8}{t^6 - t^2 - 1} = \frac{t^6 - t^2 - 1}{t^2} + \frac{t^8 - t^6 + t^2 + 1}{t^2}$$

$$= -2\sqrt{1-x} - 6 \int \frac{t^4 + 1}{t^6 - t^2 - 1} dt$$

Il 2° integrale non si riesce a calcolare perché non si riesce a trovare radici intere o razionali del polinomio al denominatore e quindi non si riesce ad applicare la formula di Hermite.

6. La funzione $\frac{\sqrt{1-x}}{x + \sqrt[3]{1-x}}$ è definita per $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x + \sqrt[3]{1-x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ -1+x \neq x^3 \\ x \neq \alpha \in (-1, 0) \end{cases}$

Dunque $ID = (-\infty, \alpha] \cup [\alpha, 1]$.

In $(-\infty, -2]$ f è continua e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{x + \sqrt[3]{1-x}} = 0$ con $\text{ord } \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$
 f non è integrabile in $(-\infty, -2]$

In $[-2, \alpha)$ f è continua e $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{1-x}}{x + \sqrt[3]{1-x}} = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{0} = \infty$ con $\text{ord } 1$

poiché $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x + \sqrt[3]{1-x}}{x - \alpha} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \alpha} 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} = 1 - \frac{1}{3(1-\alpha)^{2/3}} \neq 0$

essendo $\alpha + \sqrt[3]{1-\alpha} = 0$. Dunque f non è integrabile in $[-2, \alpha)$.

In $[0, 2]$ non ha senso studiare l'integrabilità di f perché la funzione non è definita in tutto $[0, 2]$.