

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

20 aprile 2022

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{1+i} |z|^2$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il dominio della funzione

$$f(x) = \log_{0,2} \left(2^{\frac{\sqrt{3^{x+1}-3^{2x}}-3^x}{1-3^x}} - 1 \right).$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 e^{\cos x} - \sin^3 x}{\ln^4(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{\cos x} - \sin^3 x}{\ln^4(1+x)}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = e^x \sqrt{|x^2 - x - 2|}$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare

$$\int \frac{\arctan \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} dx.$$

6. Studiare, al variare di $\alpha > 0$, l'integrabilità della funzione $f(x) = \frac{\arctan \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x-1})^\alpha}$ in $[0, 1)$, $(1, 3]$ e $[3, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $\frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{1-i^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, posto $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ abbiamo

$$\rho^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rho^2 \Rightarrow \rho^2 \left[\rho(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] = 0$$

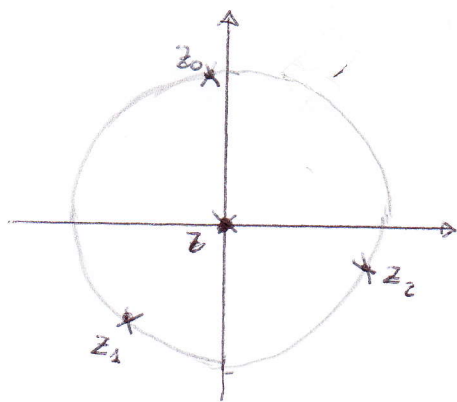
$$\Rightarrow \rho = 0 \vee \rho(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = 0 \vee \rho(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi$$

$$\Rightarrow z = 0 \vee \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : 3\theta = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow z = 0 \vee \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

L'equazione ha 4 soluzioni:

$$z = 0, \quad z_0 = \cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi, \quad z_1 = \cos \left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin \left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \text{ cioè } z_1 = \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi$$

$$z_2 = \cos \left(\frac{7}{12}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + i \sin \left(\frac{7}{12}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) \text{ cioè } z_2 = \cos \frac{23}{12}\pi + i \sin \frac{23}{12}\pi$$



2. $2 \cdot \frac{\sqrt{3^{x+1} - 3^{2x}} - 3^x}{1 - 3^x} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3^{x+1} - 3^{2x}} - 3^x}{1 - 3^x} > 0$

Applico la regola del segno nell'insieme di definizione della frazione,

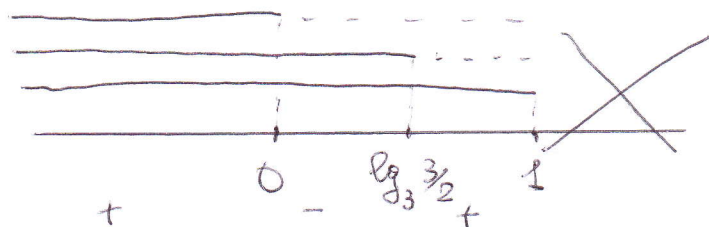
cioè quando $3^{x+1} - 3^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x - 3^{2x} \geq 0 \Rightarrow 3(1 - 3^x) \geq 0 \Rightarrow 3^x \leq 1$

$$0 \leq t \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 3^x \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$$

$$N > 0 \quad \sqrt{3^{x+1} - 3^{2x}} > 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3^x - 3^{2x} \geq 0 \\ 3^x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3 \cdot 3^x - 3^{2x} \geq 3^{2x} \\ 3^x \geq 0 \end{cases} \quad \forall x$$

$$2 \cdot 3^{2x} - 3^x \leq 0 \Rightarrow \frac{3^x}{3^x} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq 3^x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow x < \log_3 \frac{3}{2}$$

$$D > 0 \quad 1 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 1 \Rightarrow x < 0$$



$$ID = (-\infty, 0] \cup]\lg_{3/2} 1, 1[$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot e^{\cos x} - \sin^3 x}{\ln^4(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 e^{\cos x} - x^3}{x^4}$$

poiché se $x \rightarrow 0$

$\sin x \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\cos x} - 1) \frac{x^3}{x^4} = (e-1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq$$

$$\text{poiché } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e-1) \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (e-1) \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{\cos x} - \sin^3 x}{\ln^4(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{\cos x}}{\ln^4(1+x)} = +\infty$$

$$\text{essendo che } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{\cos x} = +\infty$$

$$\text{essendo } x^3 e^{\cos x} \geq x^3 e^{-1} \rightarrow +\infty$$

(teorema delle divergenze obbligate)

$$\text{Inoltre } \text{ord}(x^3 e^{\cos x}) = 3 \quad \text{essendo } \frac{x^3 e^{\cos x}}{x^3} = e^{\cos x} \text{ sempre tra}$$

e^{-1}

e e, quantità strett. positive

Invece $\sin^3 x$ è una quantità trascurabile e quindi si può trascurare mentre $\ln^4(1+x) \rightarrow +\infty$ con ordine comunque finito.

$$4) ID = \mathbb{R} \quad f \text{ non è né pari né dispari} \quad f(0) = \sqrt{2} \quad (0, \sqrt{2}) \text{ intersezione con asse } y$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{|x^2 - x - 2|} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (-1, 0) \\ (2, 0) \end{matrix} \text{ intersez. con asse } x$$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x \sqrt{|x^2 - x - 2|} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Non ha asintoti verticali perché f è continua in $\mathbb{R}$

$$\text{Non ha asintoto orizzontale perché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{|x^2 - x - 2|}}{x} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

$$\text{Non ha asintoto obliquo a } +\infty \text{ perché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sqrt{|x^2 - x - 2|}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot x}{x} = +\infty$$

Per $x \rightarrow -\infty$ si ha $y = 0$ asintoto orizzontale perché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sqrt{|x^2 - x - 2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x |x| = 0 \cdot (+\infty) = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

$$y' = e^x \sqrt{|x^2 - x - 2|} + e^x \frac{1}{2\sqrt{|x^2 - x - 2|}} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{|x^2 - x - 2|} (2x - 1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x^2 - x - 2 \neq 0$$

$$x \neq -1, 2$$

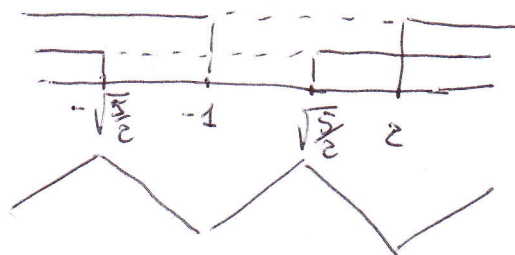
$$\Rightarrow y' = \begin{cases} e^x \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{e^x}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} (2x - 1) = \frac{e^x (2x^2 - x - 4 + 2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} & \text{se } x < -1 \vee x > 2 \\ e^x \sqrt{-x^2 + x + 2} - \frac{e^x (2x - 1)}{2\sqrt{-x^2 + x + 2}} = \frac{e^x (-2x^2 + x + 4 - 2x + 1)}{-x^2 + x + 2} & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}$$

segue che

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^x (2x^2 - 5)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} > 0 \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} -\frac{e^x (2x^2 - 5)}{2\sqrt{-x^2 + x + 2}} > 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5 > 0 \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2 - 5 < 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{5}{2}} \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} -\sqrt{\frac{5}{2}} < x < \sqrt{\frac{5}{2}} \\ -1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee x > 2 \vee -1 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$$



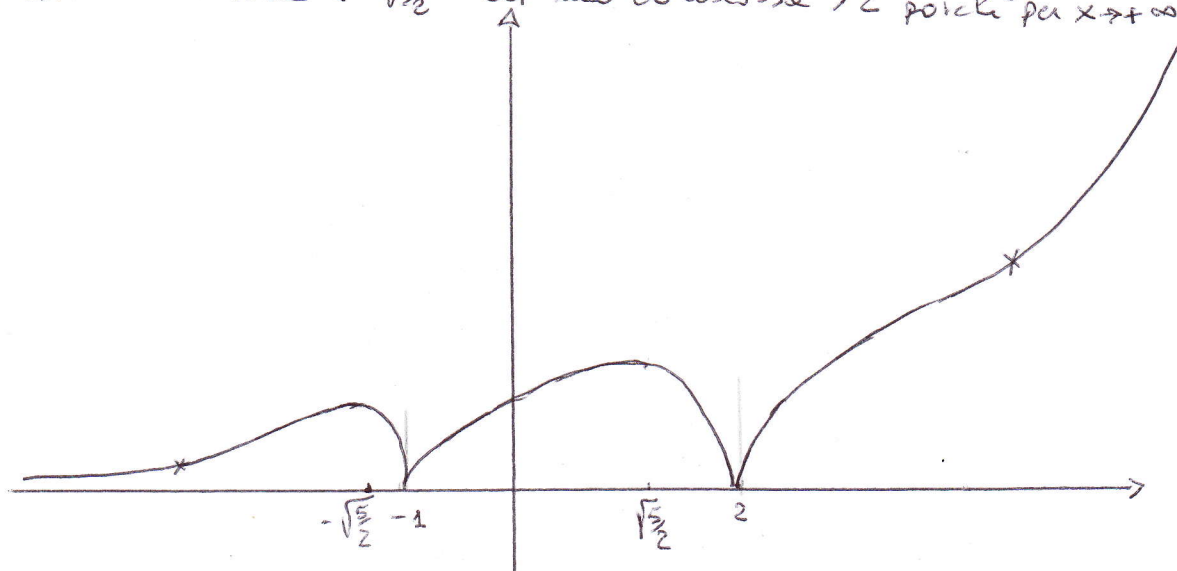
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \cap \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = f(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}) \end{cases}$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y' = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x (2x^2 - 5)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \pm \frac{-3e^{-1}}{0^+} = \mp \infty \quad x = -1 \text{ pto cuspidale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y' = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x (2x^2 - 5)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \pm \infty \quad x = 2 \text{ pto cuspidale}$$

Per brevità ometto lo studio della derivata seconda. Si deduce però che f ha un flesso di ascissa $< -\sqrt{\frac{5}{2}}$ ed uno di ascissa > 2 poiché per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim x e^x$.



$$5. \int \frac{\arctg \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} dx = \int (D 2\sqrt{x-1}) \arctg \sqrt{x+1} dx \stackrel{P.P.}{=} 2\sqrt{x-1} \arctg \sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{1+x+1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$$

Risolve il secondo integrale ponendo $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt$:

$$\int \frac{1}{x+2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{1}{\frac{1+t^2}{1-t^2} + 2} t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = 4 \int \frac{t^2}{(3-t^2)(1-t^2)} dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}} dt - \int \frac{\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} dt - \int \frac{1}{t-1} dt + \int \frac{1}{t+1} dt = \sqrt{3} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \text{cost.}$$

poiché $\frac{t^2}{(3-t^2)(1-t^2)} = \frac{t^2}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-\sqrt{3}} + \frac{B}{t+\sqrt{3}} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1}$

$$= \frac{A(t+\sqrt{3})(t^2-1) + B(t-\sqrt{3})(t^2-1) + C(t^2-3)(t+1) + D(t^2-3)(t-1)}{(3-t^2)(1-t^2)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ \sqrt{3}A-\sqrt{3}B+C-D=1 \\ -A-B-3C-3D=0 \\ -A\sqrt{3}+B\sqrt{3}-3C+3D=0 \end{cases}$$

Sommo 1^a e 3^a

Sommo 2^a e 4^a

$$\begin{cases} 2C+2D=0 \\ -2C+2D=1 \\ A+B+C+D=0 \\ -\sqrt{3}A+\sqrt{3}B-3C+3D=0 \end{cases}$$

$$D = \frac{1}{4}$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{3}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Dunque:

$$\int \frac{\arctg \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} dx = 2\sqrt{x-1} \arctg \sqrt{x+1} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{3}}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{3}} \right| + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} \right| + \text{cost.}$$

6. La funzione $f(x) = \frac{\arctg \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x-1})^\alpha}$ è definita su $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$.

Segue che f non è integrabile in $[0, 1)$ poiché non è definita in questo intervallo.

Poiché f è continua in $(1, 3]$ e $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctg \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x-1})^\alpha} = \arctg \sqrt{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x-1})^\alpha} = +\infty$

con ordine $\frac{1}{2}$, segue che è integrabile in $(1, 3] \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 1$ cioè $\alpha < 2$.

Poiché f è continua in $[3, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x-1})^\alpha} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}^\alpha} = 0$

con ordine $\frac{1}{2}$, segue che f è integrabile in d.l. in $[3, +\infty) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2.$$