

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

17 marzo 2022

1. Risolvere la seguente equazione

$$i(z)^6 + 2 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}} \right)^{70} z^3 + i \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^9 = 0$$

e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il dominio della funzione

$$y = \log_{0,2} \frac{\sqrt{x^2 - 2|x| - 3} - x}{100 - x^2}.$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2\pi} - x^\pi + \sin^2 x}{x^3 + \arctan^3 x + e^{\sqrt{x}}}.$$

4. Studiare la funzione

$$y = \frac{1}{\ln |x|} + \ln (\ln |x|)$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare

$$\int \left(\sin^3 x + \frac{1}{\sin^3 x} \right) dx.$$

6. Stabilire, giustificando la risposta, se la funzione integranda del punto precedente è integrabile in $(0, 1]$, $[1, 3]$ e $(\pi, 6]$.

Svolgimento

1. Poiché
$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}} \right)^{70} = \cos \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{7} \right) 70 + i \sin \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{7} \right) 70 = \cos 4\pi + i \sin 4\pi = 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^9 = \cos \frac{\pi}{3} \cdot 9 + i \sin \frac{\pi}{3} \cdot 9 = \cos 3\pi + i \sin 3\pi = -1$$

l'equazione diventa $z^6 + 2z^3 - i = 0$. Posto $z^3 = w$ in $\mathbb{C}$

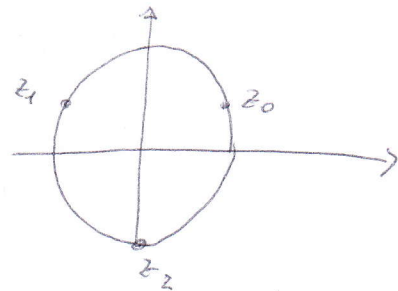
$iw^2 + 2w - i = 0 \quad \Delta = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0 \quad w_{1/2} = -\frac{1}{i} = i$ (radice doppia) e quindi

$$z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$



l'equazione ha 6 radici a due a due coincidenti:

2.
$$\frac{\sqrt{x^2 - 2|x| - 3} \cdot x}{100 - x^2} > 0$$
 Applico la regola del segno nel dominio cioè per $x^2 - 2|x| - 3 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| - 3 \geq 0$

$|x|_{1/2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

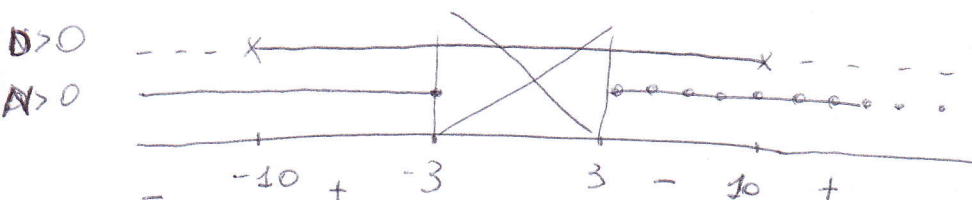
$|x| \leq -1 \vee |x| \geq 3$

$\emptyset \quad x \leq -3 \vee x \geq 3$

$N > 0 \quad \sqrt{x^2 - 2|x| - 3} > x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x| - 3 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2|x| - 3 > x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 2|x| + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq -3$

$\Delta > 0 \quad 100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -10 < x < 10$



$D = [-10, -3] \cup [3, 10) \cup]10, +\infty)$

3. Per il principio di sostituzione degli infiniti si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2\pi} + x^\pi + \sin^2 x}{x^3 + \arctan^3 x + e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2\pi}}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2\pi \lg x}}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2\pi \lg x - \sqrt{x}} = 0$$

(Perché $\sin^2 x$ e $\arctan^3 x$ trascurabili)

4. $y = \frac{1}{\ln|x|} + \ln(\ln|x|)$

ID $\begin{cases} |x| > 0 \\ \ln|x| > 0 \end{cases} \Rightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

ID = $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Perché ID è simmetrico rispetto all'origine e $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in ID$

f è pari. Basta studiare f per $x > 0$ e poi ribaltare il grafico rispetto all'asse y

(cambi per $x > 1$)
Per $x > 0$ studio:

$y = \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) = +\infty - \infty = \lim_{\ln x = y, y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} + \ln y = +\infty$
 $\downarrow$
 $\rightarrow -\infty$ con ord. lento
 $\rightarrow +\infty$ con ord. 1

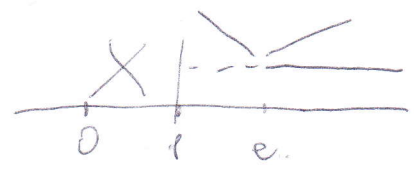
$x = 1$ A. Vert. a destra

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) = 0 + \infty = +\infty$ $\nexists$ as. orizz.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln x} + \frac{\ln(\ln x)}{x}}{x} = 0$ (per gli ordini 0 applicando T. Hospital)
 $\nexists$ as. oblique

$y' = -\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x} + \frac{1}{x \ln x} = \frac{-1 + \ln x}{x \ln^2 x} \quad \forall x > 1$

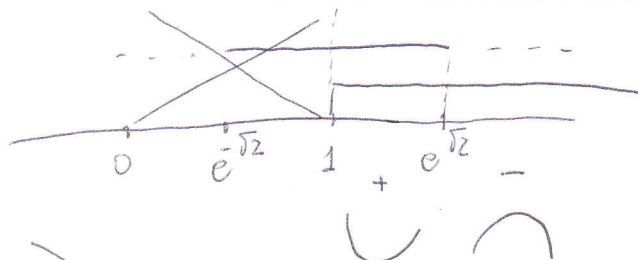
$y' > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Rightarrow x > e$



m $\begin{cases} x = e \\ y = 1 + \ln 1 \end{cases}$ in $(e, 1)$

$y'' = \frac{\frac{1}{x} \ln^2 x - (-1 + \ln x)(\ln^2 x + 2 \ln x \cdot \frac{1}{x})}{x^2 \ln^4 x} = \frac{\ln^2 x + \ln^2 x + 2 \ln x - \ln^3 x - 2 \ln^2 x}{x^2 \ln^4 x}$

$y'' > 0 \Leftrightarrow \ln x (-\ln^2 x + 2) > 0$
 $\ln x > 0 \quad x > 1$
 $\ln^2 x < 2 \quad -\sqrt{2} < \ln x < \sqrt{2} \quad e^{-\sqrt{2}} < x < e^{\sqrt{2}}$



f convessa in $]1, e^{\sqrt{2}}[$
 concava in $]e^{\sqrt{2}}, +\infty)$
 $x = e^{\sqrt{2}}$ pto di flesso

(3)

$$5. \quad \int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx = \int \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \, D(-\operatorname{colog} x) \, dx = \text{integrazione per parti}$$

$$= -\frac{\operatorname{colog} x}{\operatorname{sen} x} - \int \operatorname{colog} x \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} - \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx = -\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \, dx$$

Poiché $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \, dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt =$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt$$

$$= \ln |t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c \quad \text{e ha che}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

e quindi

$$\int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} + \operatorname{sen}^3 x \right) dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

6) La funzione $f(x) = \sin^3 x + \frac{1}{\sin^3 x}$ è continua per $\sin x \neq 0$
cioè $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^3 x + \frac{1}{\sin^3 x} = +\infty$ con ordine $3 > 1$ ($\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$)

segue che f non è integrabile in $(0, 1]$ in s.i.

Poiché f è continua in $[1, 3] \subset (0, \pi)$ f è integrabile in senso classico in $[1, 3]$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x + \frac{1}{\sin^3 x} = +\infty$ sempre con ordine $3 > 1$

segue che f non è integrabile in s.i. in $(\pi, 6) \subset (\pi, 2\pi)$.

Si nota infatti che $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0$ con ordine 1

(e quindi $\frac{1}{\sin x}$ è infinito di ordine 1 per $x \rightarrow \pi^-$) perché

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^+ \\ \pi - x = y}} \frac{\sin(\pi - y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1 \neq 0.$$