

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

31 gennaio 2022

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$(z^2)^2 = (1 + i\sqrt{3})\bar{z}^2 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000} - 1.$$

2. Data la funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^3 - 1}\right)^{\frac{2}{\ln(x-1)}},$$

- a) determinare l'insieme di definizione;
 - b) calcolare i limiti per $x \rightarrow 1$, per $x \rightarrow 2$ e per $x \rightarrow +\infty$;
 - c) dire se è integrabile in senso improprio in $(1, 2)$, in $(2, 4]$ e in $[4, +\infty)$.
3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di

$$y = \log_x(x - 1)$$

nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

4. Studiare la funzione

$$y = x + 4 \arctan \sqrt{|x - 1|}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare il seguente integrale

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 3} dx.$$

Soluzioni

1. Poiché $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000} = \left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^{500} = \left(\frac{1+2i-1}{1+1}\right)^{500} = (i)^{500} = 1$, l'equazione diventa

$$z^4 = (1+i\sqrt{3})z^2$$

Posto $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$

e quindi $\bar{z} = \rho(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta))$ si ha

$$\rho^4(\cos 4\vartheta + i \sin 4\vartheta) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\rho^2(\cos(-2\vartheta) + i \sin(-2\vartheta)) \text{ cioè}$$

$$\rho^4(\cos 4\vartheta + i \sin 4\vartheta) = 2\rho^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\vartheta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\vartheta\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\rho^4 = 2\rho^2 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 4\vartheta = \frac{\pi}{3} - 2\vartheta + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \rho = 0 \vee \rho = \sqrt{2} \quad \wedge \quad 6\vartheta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow z = 0 \vee \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases} \quad \text{L'equazione ha 7 soluzioni: } z = 0 \text{ e}$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18}\right)$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{18} + \pi\right)\right) = -z_0$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{18} + i \sin \frac{7\pi}{18}\right)$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{18} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{18} + \pi\right)\right) = -z_1$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18}\right)$$

$$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{18} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{18} + \pi\right)\right) = -z_2$$

2. a) $\begin{cases} \frac{1}{x^3-1} > 0 \\ x-1 > 0 \\ \ln(x-1) \neq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \frac{1}{x^3-1} = 0 \\ \ln(x-1) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 > 1 \\ x > 1 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x > 1 \wedge x \neq 2 \\ \text{ID} =]1, 2[\cup]2, +\infty[\end{matrix}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^3-1}\right)^{\frac{2}{\ln(x-1)}} = (+\infty)^0 = \text{f.i.} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{2}{\ln(x-1)} \ln \frac{1}{x^3-1}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-2 \frac{\ln(x^3-1)}{\ln(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-2 \frac{\ln(x-1) + \ln(x^2+x+1)}{\ln(x-1)}} = e^{-2} = e^{-2}$$

essendo $\lim_{x \rightarrow 1^+} -2 \left(1 + \frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x-1)}\right) = -2 \left(1 + \frac{\ln 3}{-\infty}\right) = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x^3-1} \right)^{\frac{2}{\ln(x-1)}} = \left(\frac{1}{7} \right)^{-\infty} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^3-1} \right)^{\frac{2}{\ln(x-1)}} = \left(\frac{1}{7} \right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3-1} \right)^{\frac{2}{\ln(x-1)}} = 0^0 = f.i. = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{\ln(x-1)} \ln \frac{1}{x^3-1}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2 \left(1 + \frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x-1)} \right)} = e^{-2(1+2)} = e^{-6}$$

essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{\ln x} = 2.$

c) Per decidere se f è integrabile in s.i. in $]1, 2[$ studio i $\lim$ V_i negli estremi: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^{-2} \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è integ. in senso classico in $]1, \frac{3}{2}]$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, studio l'ordine di infinito, dopo aver ricordato che $\frac{2}{\ln(x-1)} \ln \frac{1}{x^3-1} = -2 \left(1 + \frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x-1)} \right).$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{2}{\ln(x-1)} \ln \frac{1}{x^3-1}} \cdot \left(\frac{2}{\ln(x-1)} \ln \frac{1}{x^3-1} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \underbrace{\left(\frac{1}{x^3-1} \right)^{\frac{2}{\ln(x-1)}}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\left(-2 \frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1} \ln(x-1) - \frac{\ln(x^2+x+1)}{x-1}}{\ln^2(x-1)} \right)}_{+\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ con ord $> 1 \Rightarrow f$ non è integrabile in s.i. in $[\frac{3}{2}, 2[$

Poiché $\int_1^2 f(x) dx = \underbrace{\int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_{\frac{3}{2}}^2 f(x) dx}_{+\infty} = +\infty$, segue che f non è integ. in s.i. in $]1, 2[$.

In fine f non è integrabile in s.i. in $[4, +\infty)$ essendo

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-6} \neq 0$, mentre f è integrabile in senso classico e quindi anche in s.i. in $(2, 4]$ essendo continua con $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \in \mathbb{R}.$

3. Equazione retta tangente a f_p nel pto di ascissa x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Nel nostro caso $x_0 = 2, f(x_0) = f_2 1 = 0$

Calcolo $f'(2)$. Poiché

$$\Delta \log_x (x-1) = \Delta \frac{\ln(x-1)}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x-1} \ln x - \frac{\ln(x-1)}{x}}{\ln^2 x} \quad \text{segue che}$$

$$f'(2) = \frac{\ln 2 - \frac{\ln 1}{2}}{\ln^2 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

e quindi la tangente ha equazione

$$y = \frac{1}{\ln 2} (x - 2).$$

4. $ID = \mathbb{R}$ f non è pari né dispari $f(0) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi \quad (0, \pi)$

Non si può studiare la positività e l'intersezione con asse x

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x + 4 \arctg \sqrt{x-1} = \pm \infty + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = \pm \infty \quad \text{A asintoti orizzontali}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x + 4 \arctg \sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + 4 \frac{\arctg \sqrt{x-1}}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x + 4 \arctg \sqrt{x-1} - x = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \quad y = x + 2\pi \quad \text{asint. obliquo a } \pm \infty$$

A asintoti verticali perché la funzione è continua in $\mathbb{R}$

$$y' = 1 + 4 \cdot \frac{1}{1 + |x-1|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x-1|}} \cdot \frac{x-1}{|x-1|} \quad \forall x \neq 1$$

Poiché

$$y' = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1 \\ 1 - \frac{2}{(2-x)\sqrt{1-x}} & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \text{segue che}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 1 \quad \text{pto cuspidale}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ 1 - \frac{2}{(2-x)\sqrt{1-x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ \frac{2}{(2-x)\sqrt{1-x}} < 1 \end{cases}$$

$\underbrace{\quad}_0 \text{ per } x > 1 \qquad \underbrace{\quad}_0 \text{ per } x < 1$

$$\Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ (2-x)\sqrt{1-x} > 2 \end{cases} \Rightarrow (2-x)^2(1-x) > 4$$

posso elevare al quadrato
essendo ambo i membri
positivi

$$(x^2 - 4x + 4)(1 - x) > 1$$

$$x^2 - 4x + 4 - x^3 + 4x^2 - 4x > 4$$

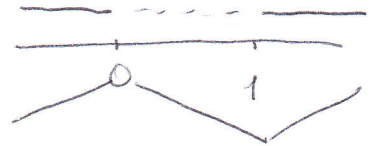
$$x^3 - 5x^2 + 8x < 0 \quad x(x^2 - 5x + 8) < 0$$

Por lo tanto $x^2 - 5x + 8 > 0 \quad \forall x$ essendo $\Delta = 25 - 32 < 0$ si conclude che

$$y' > 0 \Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0$$

$$H \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi \end{cases}$$

$$\text{in } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

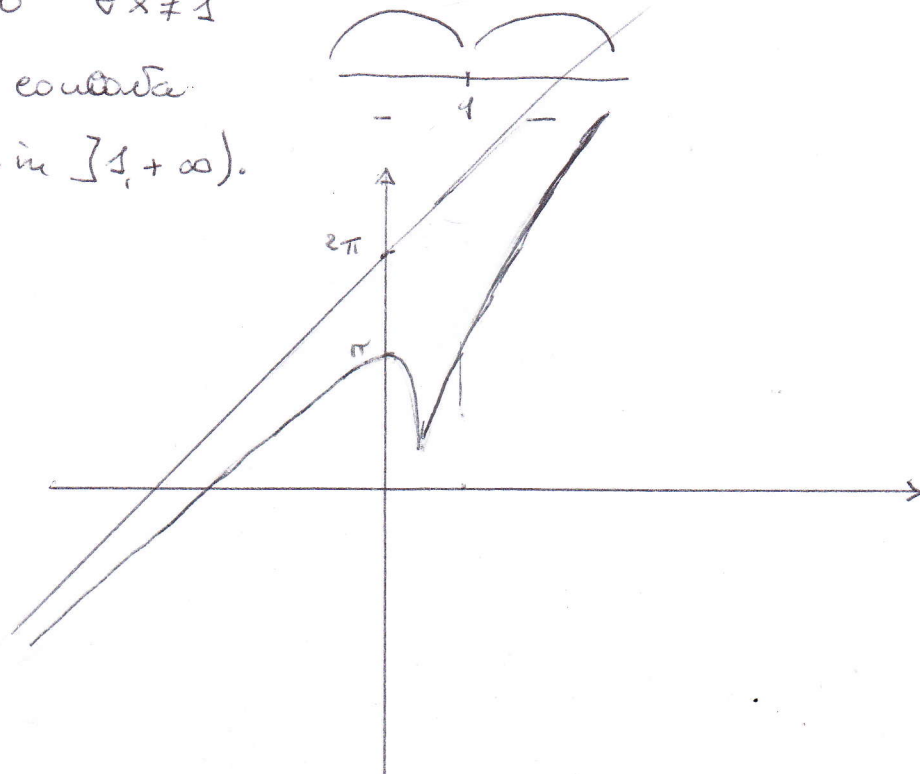


Per completezza, studio il segno di y'' anche se si infuoca ormai e' oramai della funzione.

$$y'' = \begin{cases} D \left(1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}} \right) = 2 \frac{-\sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x^2(x-1)} = 2 \frac{2-3x}{2x^2(x-1)\sqrt{x-1}} & \text{if } x > 1 \\ D \left(1 - \frac{2}{(2-x)\sqrt{1-x}} \right) = 2 \frac{-\sqrt{1-x} + \frac{2-x}{2\sqrt{1-x}}}{(2-x)^2(1-x)} = 2 \frac{x-4}{(2-x)^2(1-x)\sqrt{1-x}} & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

$$f'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{2-3x}{x^2(x-1)^{3/2}} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 1 \\ 2 \frac{x-4}{(2-x)^2(1-x)^{3/2}} > 0 \end{cases}$$

Durch $y'' > 0 \quad \forall x \neq 1$
 ergibt sich f' konstant
 in $(-\infty, 1[$ und $]1, +\infty)$.



5. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 3} dx$

Posso $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = x + t \Rightarrow$
 $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2tx + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 3}{2(1-t)}$ quindi

$dx = \frac{1}{2} \frac{2t(1-t) + t^2 - 3}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{2} \frac{-t^2 + 2t - 3}{(1-t)^2} dt$

$= \frac{1}{2} \int \left(x + \frac{t^2 - 3}{2(1-t)} \right) \frac{-t^2 + 2t - 3}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(-t^2 + 2t - 3)^2}{(1-t)^3} dt$

$= -\frac{1}{4} \int \frac{(t^2 - 2t + 3)^2}{(t-1)^3} dt = -\frac{1}{4} \int \frac{((t-1)^2 + 2)^2}{(t-1)^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(s^2 + 2)^2}{s^3} ds$

$= \frac{1}{4} \int \frac{s^4 + 4s^2 + 4}{s^3} ds = \frac{1}{4} \int \left(s + \frac{4}{s} + \frac{4}{s^3} \right) ds$
 $t-1=s$
 $t=s+1$
 $dt=ds$

$= \frac{1}{4} \frac{s^2}{2} + \ln|s| - \frac{2}{s} + C = \frac{1}{4} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x - 1)^2}{2} + \ln|\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x - 1| +$
 $-\frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x - 1)^2} + C.$

Se non viene in mente il trucco $t-1=s$ per semplificare la funzione integranda, allora bisogna fare divisione tra polinomi + Hermitte; perche:

$\frac{(t^2 - 2t + 3)^2}{(t-1)^3} = \frac{t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 12t + 9}{t^3 - 3t^2 + 3t - 1} = t-1 + \frac{4t^2 - 8t + 8}{(t-1)^3}$

$$\begin{array}{r} t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 12t + 9 \\ t^4 - 3t^3 + 3t^2 - t \\ \hline -t^3 + 7t^2 - 11t + 9 \\ -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 \\ \hline 4t^2 - 8t + 8 \end{array}$$

o la

$\frac{1}{4} \int \frac{(t^2 - 2t + 3)^2}{(t-1)^3} dt = \frac{1}{4} \int \left[t-1 + \frac{4(t^2 - 2t + 2)}{(t-1)^3} \right] dt = \frac{1}{4} \left[\frac{t^2}{2} - t + \int \frac{(t-1)^2 + 1}{(t-1)^3} dt \right] =$
 $= \frac{1}{8} t^2 - \frac{1}{4} t + \int \frac{1}{t-1} dt + \int \frac{1}{(t-1)^3} dt = \frac{t^2}{8} - \frac{t}{4} + \ln|t-1| + \frac{1}{2(t-1)^2} + C = \dots$

oppure x Hermitte (se non viene in mente che $t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$) si ha

$\frac{t^2 - 2t + 2}{(t-1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{d}{dt} \frac{Bt+C}{(t-1)^2} = \dots$