

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

10 dicembre 2021

1. Risolvere la seguente equazione nel piano complesso

$$\bar{z}^2 - iz - |z - 1|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{3}+i} \right)^{24}.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{\frac{4^x - 2^x - 6}{x - \sqrt{x^2 - x}}}.$$

3. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \frac{\exp(2x^2) - 1 - 2\sin^2 x}{x^3} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\ln |x| - 2}{\ln |x| - 1}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Dire, giustificando la risposta, se la funzione g del punto precedente è integrabile in $]0, 1]$, in $[1, 4] - \{e\}$ e in $[4, +\infty)$.
6. Calcolare l'insieme delle primitive della funzione

$$h(x) = \frac{1}{x(\ln^3 x + \ln x - 2)}.$$

Svolgimento

1. Posto $z = x + iy$ si ha

$$\bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2xyi - y^2, \quad |z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{3}+i} \right)^{24} = \left(\frac{2 \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)}{2 \left(\cos \frac{11}{6} + i \sin \frac{11}{6} \right)} \right)^{24} = \left(\cos \left(\frac{7}{4} - \frac{11}{6} \right)\pi + i \sin \left(\frac{7}{4} - \frac{11}{6} \right)\pi \right)^{24} =$$

$$= \cos 38\pi + i \sin 38\pi = 1$$

e l'equazione diventa

$$x^2 - 2xyi - y^2 - ix + y - (x^2 - 2x + 1 + y^2) = 1$$

$$x^2 - 2xyi - y^2 - ix + y - x^2 + 2x - 1 - y^2 = 1$$

$$\begin{cases} -2y^2 + y + 2x - 2 = 0 \\ 2xy + x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2y^2 + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + y + 2 = 0 \quad \Delta < 0 \\ \emptyset \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{L'equazione ha una sola soluzione } z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$2. \quad \frac{4^x - 2^x - 6}{x - \sqrt{x^2 - x}} \geq 0$$

Perché la frazione è definita se

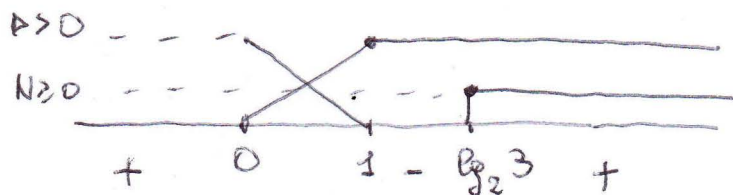
$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x \neq \sqrt{x^2 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

applicheremo la regola del segno per $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

$$\begin{aligned} N \geq 0 \quad 4^x - 2^x - 6 \geq 0 \quad 2^{2x} - 2^x - 6 \geq 0 \quad 2^x = \frac{1 \pm 5}{2} = 3 \\ 2^x \leq -2 \quad \vee \quad 2^x \geq 3 \Rightarrow x \geq \log_2 3. \\ \emptyset \quad x \geq \log_2 3 \end{aligned}$$

$$D > 0 \quad x - \sqrt{x^2 - x} > 0 \quad \sqrt{x^2 - x} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x < x^2 \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$



$$D = (-\infty, 0[\cup]\log_2 3, +\infty)$$

3. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (prodotto di funzione infinitesimale per funzione limitata)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x^2} - 1 - 2 \sin^2 x}{x^3} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) - 2(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{2x^2} + 2x^4 - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{3}x^4}{x^3} = 0 \end{aligned}$$

segue che $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e quindi f è continua in $x=0$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ mentre $\forall \alpha \neq 0$ f ha una discont. eliminabile

in quanto $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ ma $0 \neq f(0)$.

In tutti gli altri punti del dominio f è continua perché somma, prodotto, composta di funzioni continue.

$$4. \text{ ID: } \begin{cases} |x| > 0 \\ \ln |x| \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq \pm e \end{matrix} \quad D = \mathbb{R} - \{0, +e, -e\}$$

Poiché $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$, basta studiare f per $x > 0$ e ribaltare poi f rispetto all'asse y .

Studio dunque

$$y = -\frac{\pi}{4} + \arctg \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} \quad \text{per } x > 0, x \neq e$$

$$y > 0 \Leftrightarrow \arctg \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} > \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{\ln x} - 2 - \cancel{\ln x} + 1}{\ln x - 1} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} = -\frac{\pi}{4} + \arctan 1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{funz. prolungabile per continuit  in } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} = -\frac{\pi}{4} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{perch  } y = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} \rightarrow \frac{-1}{0^+} = \pm \infty \quad \text{se } x \rightarrow e^{\mp}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} = -\frac{\pi}{4} + \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} = -\frac{\pi}{4} + \arctan 1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0.$$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} \right)^2} \cdot \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x - 2)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{1}{x \left[(\ln x - 1)^2 + (\ln x - 2)^2 \right]}$$

$$= \frac{1}{x (2 \ln^2 x - 6 \ln x + 5)}$$

$$ID(y') = ID(y)$$

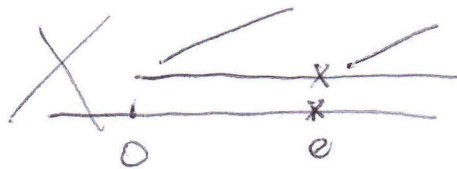
calcolo i limiti di y' per $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow e$ per capire la pendenza con cui parte f_f in questi punti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x (2 \ln^2 x - 6 \ln x + 5)} = \frac{1}{0^+ \cdot (+\infty)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

cio  f_f parte da 0 con tangente verticale per gli ordini

$$\lim_{x \rightarrow e^-} y' = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x (2 \ln^2 x - 6 \ln x + 5)} = \frac{1}{e}$$

$$y'' > 0 \Rightarrow 2 \ln^2 x - 6 \ln x + 5 > 0 \quad \Delta > 0. \quad \forall x > 0, x \neq e$$



la funzione cresce in $]0, e[$
e in $]e, +\infty[$.

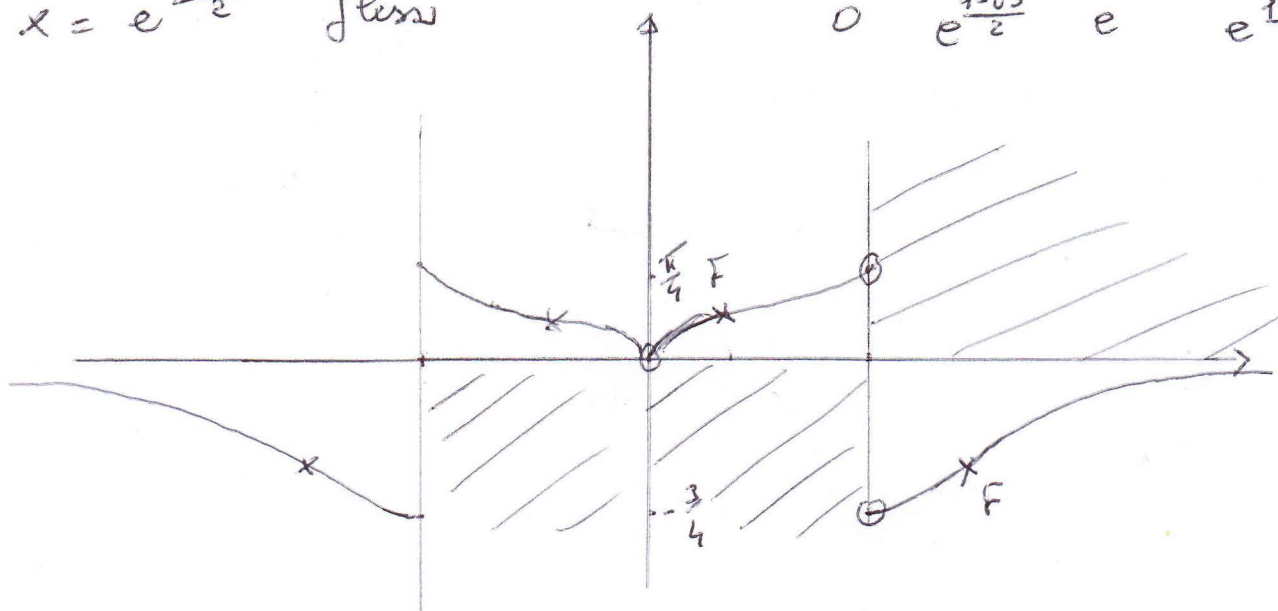
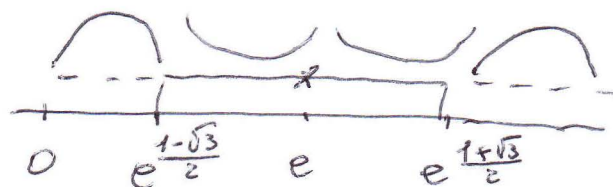
(4)

$$y'' = - \frac{2 \ln^2 x - 6 \ln x + 5 + \cancel{x} (4 \ln x - 6)}{x^2 (2 \ln^2 x - 6 \ln x + 5)^2} = - \frac{2 \ln^2 x - 2 \ln x - 1}{x^2 (2 \ln^2 x - 6 \ln x + 5)^2}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 2 \ln^2 x - 2 \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2} < \ln x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} < x < e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \text{ con } x \neq e$$

$$x = e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \text{ fless}$$



5. Poiché g è continua in $]0, 1[$ con $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \in \mathbb{R}$ g è integrabile in senso classico in $]0, 1[$.

Poiché g è continua in $[1, e[$ e in $]e, 4[$ e $\lim_{x \rightarrow e^-} g(x) \in \mathbb{R}$,

$\lim_{x \rightarrow e^+} g(x) \in \mathbb{R}$, g è integ. in senso classico in $[1, e[$

e in $]e, 4[$ e quindi lo è in $[1, 4]$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, serve studiare ordine di infinitesimo

per concludere se è integ. in senso improprio o no in $[4, +\infty[$.

Fissato $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}}{x^{-\alpha}} = \frac{0}{0} \neq$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x(2\ln^2 x - 6\ln x + 5)}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^{\alpha+1}}{\alpha x(2\ln^2 x - 6\ln x + 5)} = \infty \quad \forall \alpha > 0$$

ovvero $g \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ con ordine comunque piccolo e quindi
 $\alpha < 1 \Rightarrow g$ non è integrabile su $\mathbb{R}_+$ in $[1, +\infty)$.

$$6. \quad \int \frac{1}{x(\ln^3 x + \ln x - 2)} dx = \int \frac{1}{t^3 + t - 2} dt = \int \frac{1}{(t-1)(t^2+t+2)} dt =$$

$$\ln x = t \quad \frac{1}{x} dx = dt$$

per cui

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+2} = \frac{(A+B)t^2 + (A-B+C)t + 2A-C}{(t-1)(t^2+t+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ 2A-C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ A+A+2A-1=0 \\ C=2A-1 \end{cases} \quad \begin{aligned} B &= -\frac{1}{4} \\ A &= \frac{1}{4} \\ C &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{t-1} dt + \int \frac{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{2}}{t^2+t+2} dt = \frac{1}{4} \ln|t-1| - \frac{1}{4} \int \frac{t+2}{t^2+t+2} dt$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{8} \ln(x^2+\ln x+2) - \frac{3}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\ln x+1}{\sqrt{7}} + C,$$

essendo $\int \frac{t+2}{t^2+t+2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t+1+3}{t^2+t+2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2+t+2) + \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2+t+2} dt$

$$= \frac{1}{2} \ln(t^2+t+2) + \frac{3}{4} \int \frac{4}{(2t+1)^2+7} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2+t+2) + \frac{6}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+\ln x+2) + \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\ln x+1}{\sqrt{7}} + C$$