

# Corso di laurea in Chimica

## Esame di

### ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

8 novembre 2021

1. Risolvere la seguente equazione nel piano complesso

$$(z^4 + i\sqrt{8} - 2\sqrt{2}) \left( \bar{z} + \frac{1}{i} - \frac{2+i}{3-i} \right) = 0.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \left( \frac{x^2 + 5x + 6}{\ln_2^2 x^2 - 4 \ln_2 |x|} \right)^\pi.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\ln^3 |x|}.$$

1) studiarla e tracciarne il grafico approssimativo;

2) dopo aver osservato che la funzione è prolungabile per continuità in  $x = 0$ , studiare la derivabilità di tale prolungamento in  $x = 0$ .

4. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan^3 \left( \frac{1}{x} \right) \left( \sqrt{x^2 + 4x - 2} + x \right)}{-\sin \left( \frac{1}{x} \right) - \left( \frac{1}{x} \right)}.$$

5. Data la funzione

$$g(x) = x \tan^2 x,$$

i) calcolare la primitiva che in  $x=0$  vale 0;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se la funzione è integrabile in  $[0, 1]$  e in  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

# Svolgimento

$$1) (z^4 + i\sqrt{8} - 2\sqrt{2})(\bar{z} + \frac{1}{i} - \frac{2+i}{3-i}) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(1) z^4 + i\sqrt{8} - 2\sqrt{2} = 0 \quad \vee \quad (2) \bar{z} + \frac{1}{i} - \frac{2+i}{3-i} = 0$$

$$(1) z^4 = 2\sqrt{2} - i \cdot 2\sqrt{2}$$

$$z = \sqrt[4]{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i} = \sqrt[4]{4(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})}$$

$$= \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right) \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\rho = \sqrt{8+8} = 4 \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7}{16} \pi + i \sin \frac{7}{16} \pi \right)$$

$$\omega_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{15}{16} \pi + i \sin \frac{15}{16} \pi \right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{7}{16} \pi + \pi \right) + i \sin \left( \frac{7}{16} \pi + \pi \right) \right) = -\omega_0$$

$$\omega_3 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{31}{16} \pi + i \sin \frac{31}{16} \pi \right) = -\omega_1$$

$$(2) \bar{z} + \frac{1}{i} - \frac{2+i}{3-i} \Rightarrow \bar{z} = -\frac{1}{i} + \frac{2+i}{3-i} \Rightarrow \bar{z} = \frac{-3i + 2i + i^2}{3i + 1}$$

$$\bar{z} = \frac{-4 + 3i}{1 + 3i} \cdot \frac{1 - 3i}{1 - 3i} = \frac{-4 + 3i + 12i - 9i^2}{10} = \frac{5 + 15i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

L'equazione ha 5 radici complesse.  $\Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

$$2. \frac{x^2 + 5x + 6}{\ln_2^2 x^2 - 4 \ln_2 |x|} \geq 0 \quad (\text{poich\'e la funzione potenza con esponente reale positivo } \pi \text{ \u00e8 definita quando la base } e^{-} \geq 0)$$

$$N \geq 0 \quad x^2 + 5x + 6 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} -3 \\ -2 \end{matrix} \quad x \leq -3 \vee x \geq -2$$

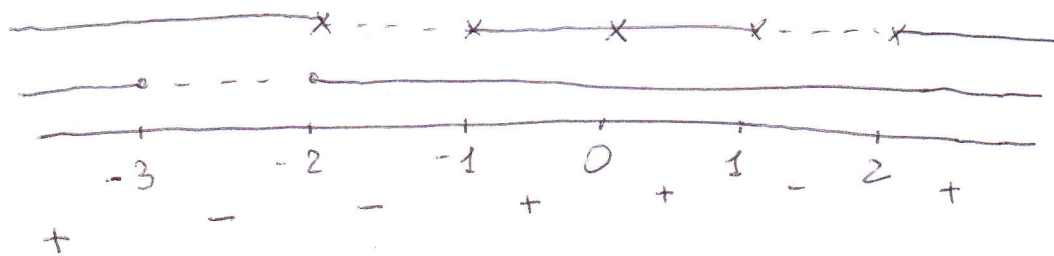
$$\Delta > 0 \quad \ln_2^2 x^2 - 4 \ln_2 |x| > 0$$

$$\text{Poich\'e } \ln_2^2 x^2 = (\ln_2 x^2)^2 = (2 \ln_2 |x|)^2 \geq 4 \ln_2^2 |x| \quad \text{allora}$$

$$4 \ln_2^2 |x| - 4 \ln_2 |x| > 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\ln_2 |x| < 0 \quad \vee \quad \ln_2 |x| > 1 \quad \Leftrightarrow 0 < |x| < 1 \quad \vee \quad |x| > 2$$

$$-1 < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < 1 \quad \vee \quad x < -2 \quad \vee \quad x > 2.$$



$$ID = (-\infty, -3] \cup ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]2, +\infty).$$

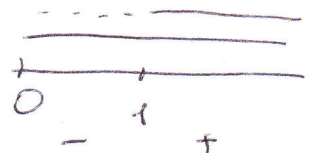
$$3. ID \quad \ln^3 |x| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 0 \\ |x| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \quad ID = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

Poiché  $f(-x) = -f(x)$   $f$  è dispari. Posso studiare per  $x > 0$  e poi ribaltare rispetto all'origine il grafico di  $f$ .

$$\text{Studio dunque } f(x) = \frac{x}{\ln^3 x} \quad \text{per } x > 0$$

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\ln^3 x} > 0 \quad N > 0 \quad x > 0$$

$$D > 0 \quad \ln x > 0 \quad x > 1$$



$$y > 0 \quad \text{per } x > 1$$

Asintoti,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln^3 x} = \frac{0^+}{-\infty} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln^3 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad x > 1 \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln^3 x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad (\text{per gli ordini}) \quad \nexists \text{ A. orizz. a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\ln^3 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^3 x} = 0 \quad \nexists \text{ as. obliquo}$$

Studio della derivata prima

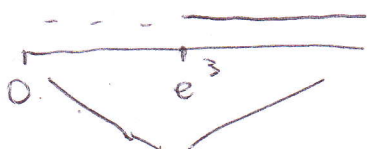
$$y' = \frac{\ln^3 x + x \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^6 x} = \frac{\ln^2 x (\ln x - 3)}{\ln^4 x} = \frac{\ln x - 3}{\ln^2 x}$$

$$ID(y') = ID(y)$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 3}{\ln^2 x} > 0$$

$$N > 0 \quad \ln x > 3 \quad x > e^3$$

$$D > 0 \quad \forall x \in ID$$



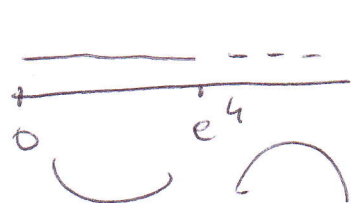
$$m \begin{cases} x = e^3 \\ y = \frac{e^3}{(\ln e^3)^3} = \frac{e^3}{27} \end{cases}$$

(3)

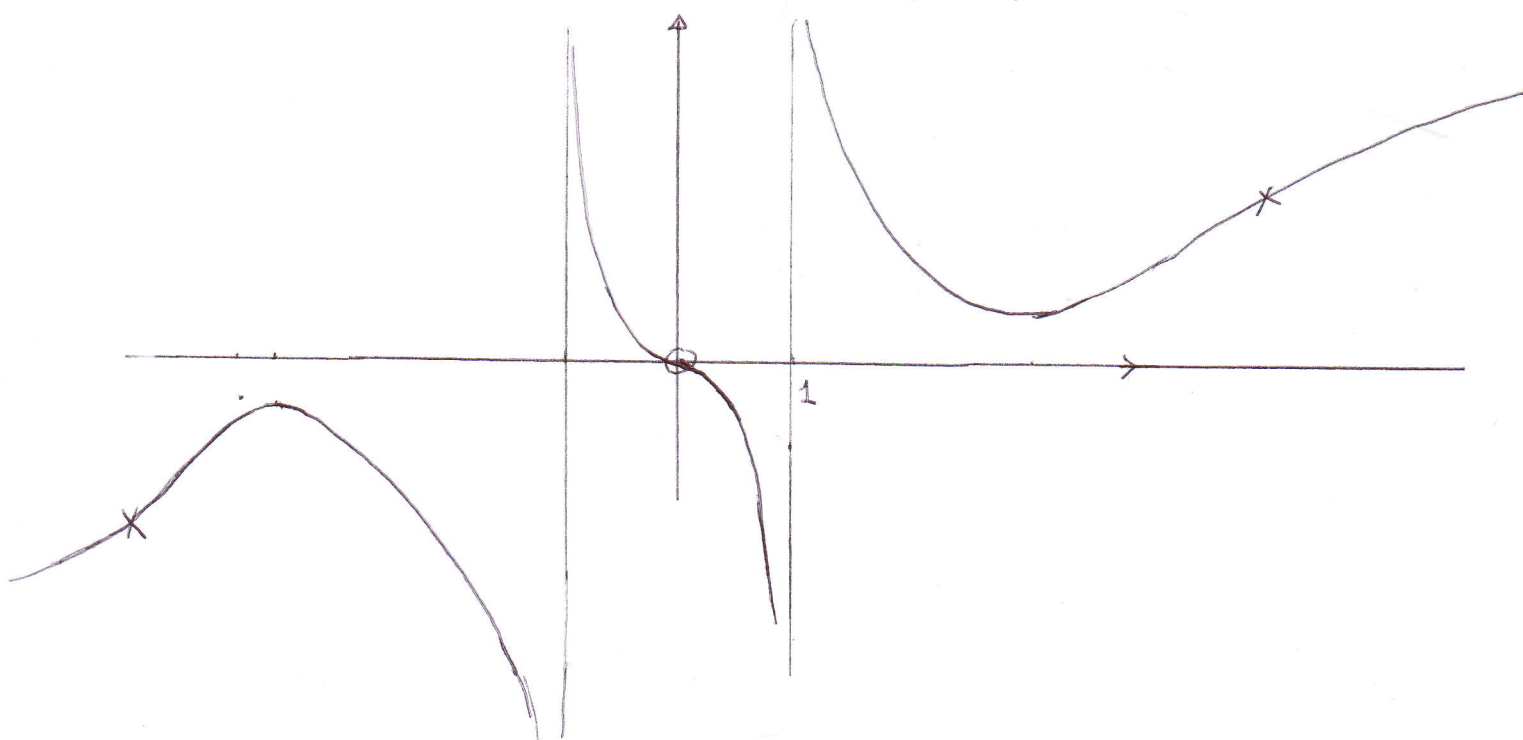
$$y'' = \Delta \frac{\ln x - 3}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x} \ln^4 x - (\ln x - 3) \cdot 4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^8 x}$$

$$= \frac{-3 \ln^4 x + 12 \ln^3 x}{x \ln^8 x} = 3 \frac{4 - \ln x}{x \ln^5 x}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 4 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 4 \Rightarrow 0 < x < e^4$$



$$F \begin{cases} x = e^4 \\ y = f(e^4) = \frac{e^4}{(\ln^3 e^4)} = \frac{e^4}{4^3} \end{cases}$$



2) Perché  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln^3|x|} = \frac{0}{\infty} = 0$   $f$  è prolungabile  
 x continuabile -  $\ln x \geq 0$

Perché  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - 3}{\ln^4 x} = \frac{-\infty}{+\infty} = 0$  per gli ordini

il prolungamento di  $f$  in  $0$  è derivabile con derivata  $= 0$   
 quindi la funzione prolungata passa per  $(0,0)$  con retta  
 tangente orizzontale.

4) Se  $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0$  e quindi

$$\arctg^3 \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^3}, \quad -\operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sim -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \quad \text{e quindi anche}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{-\frac{2}{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+4x-2}+x)(\sqrt{x^2+4x-2}-x)}{\sqrt{x^2+4x-2}-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2x^3} \frac{x^2+4x-2-x^2}{\sqrt{x^2+4x-2}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x(4-\frac{2}{x})}{2x^2 \left( |x| \sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}} - x \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x(4-\frac{2}{x})}{2x^2 \left[ -x \left( \sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}} + 1 \right) \right]} = -\frac{1}{\infty} = 0$$

5) i)  $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx =$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \int x \, dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$$

perché  $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \int x \cdot \Delta \operatorname{tg} x \, dx = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x =$

$$= x \operatorname{tg} x + \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$$

calcolo  $c$  imponendo che la primitiva in  $x=0$  sia 0, cioè

$$0 + \ln 1 - 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad \text{Dunque } F(x) = x \operatorname{tg} x - \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2}$$

ii) Perché  $ID(g) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ ,  $g$  è integrabile in senso classico in  $[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}[$ . Perché

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$  con ord.  $2 > 1$  essendo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{g(x)}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 y} \cdot \cos^2 y = 1 \neq 0$$

segue che  $g$  non è integrabile in senso imp. in  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .