

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

13 ottobre 2021

1. Risolvere la seguente equazione e rappresentare le soluzioni nel piano complesso

$$z^4 + 8|z| + \frac{i}{2} = \frac{1}{1-i} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{18}}{2}.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \frac{\ln\left(2^{x-1} + \frac{1}{2} - \sqrt{1-4^x}\right)}{\left(\ln|x| - \ln^2 x^2\right)^{\sqrt{3}}}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \left|\arctan \frac{1}{x}\right| + \ln(1+x^2).$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

4. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\lg_2(2^x + 1)^3 - \lg_2(2^{3x} + 1)\right) \lg_2(2^x + 1)}{1 + 2x - \sqrt{4x^2 + 1}}.$$

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{(\ln x) \left(\arctan \sqrt{\ln x - 1}\right)}{x^\alpha},$$

i) calcolarne una primitiva per $\alpha = 1$;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione è integrabile in $]0, 3]$ e in $[3, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, poiché $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ e

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^{18} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right)^{18} = \frac{1}{2} \left(\cos 33\pi + i \sin 33\pi \right) = \frac{1}{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{1}{2}, \text{ e l'equazione diventa}$$

$$z^4 + 8|z| = 0 \Leftrightarrow \rho^4 \cos 4\theta + i \rho^4 \sin 4\theta + 8\rho = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho = 0 \vee \begin{cases} \rho^3 \cos 4\theta + 8 = 0 \\ \rho^3 \sin 4\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = k\pi$$

Sostituendo nelle 1^a eq. segue che $\cos 4\theta = -1$ e quindi $\rho^3 = 8$ (non può essere $\cos 4\theta = 1$ perché altrimenti $\rho^3 + 1 = 0 \Rightarrow \rho = -1$ imposs.)

Dunque $\begin{cases} \rho = 2 \\ 4\theta = (2k+1)\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$

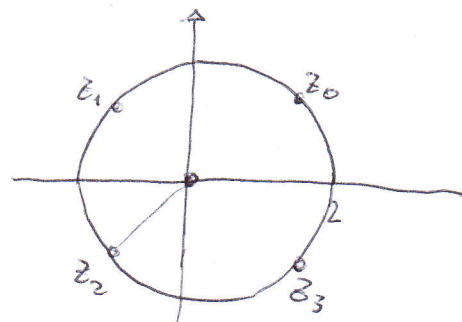
L'eq. ha 5 soluzioni: $z = 0$ e

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1+i)$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = \sqrt{2}(-1+i)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right) = \sqrt{2}(-1-i)$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = \sqrt{2}(1-i)$$



2. $\begin{cases} 2^{x-1} + \frac{1}{2} - \sqrt{1-4^x} > 0 & (\text{perché abbia senso il logaritmo}) \\ \ln|x| - \ln^2 x^2 \geq 0 & (\text{perché abbia senso la potenza con esponente reale}) \\ \ln|x| - \ln^2 x^2 \neq 0 & (\text{perché abbia senso il denominatore}) \end{cases}$

$$2^{x-1} + \frac{1}{2} > \sqrt{1-4^x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4^x \geq 0 \\ 2^{x-1} + \frac{1}{2} > 0 \\ \left(\frac{1}{2} 2^x + \frac{1}{2} \right)^2 > 1-4^x \end{cases} \begin{cases} 4^x \leq 1 & x \leq 0 \\ \forall x \\ \frac{1}{4} \cdot 2^{2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2^x > 1-2^{2x} \end{cases}$$

$$\frac{5}{4} 2^{2x} + \frac{1}{2} 2^x - \frac{3}{4} > 0 \quad \text{Ponendo } y = 2^x: 5y^2 + 2y - 3 > 0 \quad y_{1/2} = \frac{-1 \pm 4}{5}$$

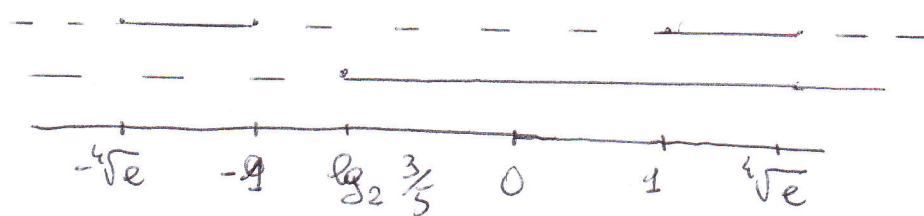
$$y < -1 \vee y > \frac{3}{5} \Rightarrow 2^x < -1 \vee 2^x > \frac{3}{5}$$

$$\emptyset \quad x > \log_2 \frac{3}{5}$$

(2)

$$\ln|x| - \ln^2 x^2 > 0 \Leftrightarrow \ln|x| - (2\ln|x|)^2 > 0 \Leftrightarrow \ln|x| - 4\ln^2|x| > 0$$

$$0 < \ln|x| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 < |x| < e^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt[4]{e} \vee -\sqrt[4]{e} < x < -1$$



N.B.

$$-1 < \log_2 \frac{3}{5} < 0 \text{ perché}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} < \frac{3}{5} < 1$$

$$C.E. =]1, \sqrt[4]{e}[$$

$$3. f(x) = \left| \arctg \frac{1}{x} \right| + \ln(1+x^2)$$

$$ID = \mathbb{R}^*$$

f è pari poiché

$$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ perché somma di 2 termini strettamente positivi.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad f \text{ prolungabile per continuità in } x = 0$$

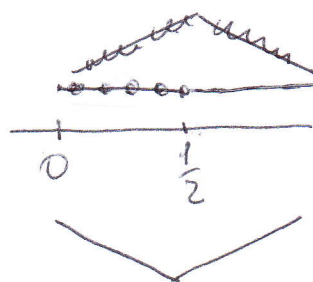
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \quad \text{A as. oz. oz. ne obliqui perché}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{per gli ordini (ord } \log x < \text{ord } x)$$

Perché f è pari, studiamo y' e y'' solo per x > 0 dove $\arctg \frac{1}{x} > 0$.
Dunque per x > 0

$$y' = \left(\arctg \frac{1}{x} + \ln(1+x^2) \right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{-1+2x}{1+x^2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow -1+2x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$



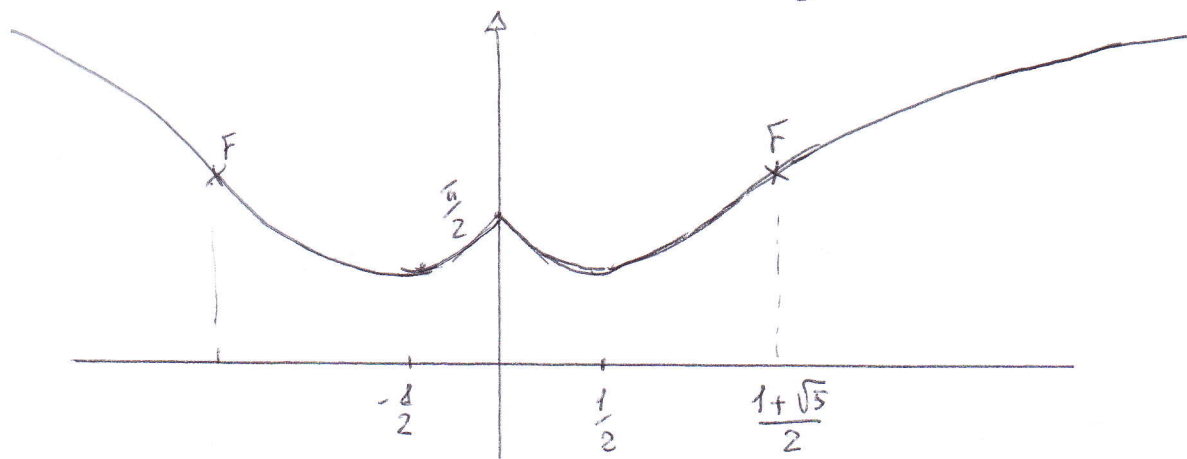
$$m \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \arctg 2 + \ln \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1+2x}{1+x^2} = -1$$

$$y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x(-1+2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 > 0 \quad 0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(3)



$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lg_2(2^x+1)^3 - \lg_2(2^{3x}+1)) \cdot \lg_2(2^x+1)}{1+2x - \sqrt{4x^2+1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg_2 \frac{(2^x+1)^3}{2^{3x}+1} \cdot \lg_2(2^x+1)}{(1+2x)^2 - (4x^2+1)} \cdot (1+2x + \sqrt{4x^2+1}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^x \cdot 4x}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^x = 0$$

$$\text{perché } \frac{(2^x+1)^3}{2^{3x}+1} = \frac{2^{3x} + 1 + 3 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^x}{2^{3x}+1} = 1 + 3 \frac{2^{2x} + 2^x}{2^{3x}+1}$$

$$\lg_2 \frac{(2^x+1)^3}{2^{3x}+1} = \lg_2 \left(1 + 3 \frac{2^{2x} + 2^x}{2^{3x}+1}\right) \sim 3 \cdot \frac{2^{2x} + 2^x}{2^{3x}+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \left(\frac{2^2}{3^3}\right)^x = 3 \left(\frac{4}{27}\right)^x$$

$$\lg_2(2^x+x) \sim x, \quad 1+2x + \sqrt{4x^2+1} \sim 4x$$

$$5. i) \int \frac{(\ln x) \operatorname{arctg} \sqrt{\ln x - 1}}{x} dx = \int \frac{t \operatorname{arctg} \sqrt{t-1}}{t} dt = \text{integrazza per parti}$$

$\ln x = t$
 $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{t-1} - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t+t-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}} dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{t-1} - \frac{1}{4} \int \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt$$

dove, posto $\sqrt{t-1} = y \Rightarrow t = 1+y^2, dt = 2y dy$, si ha

$$\int \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt = \int \frac{1+y^2}{y} \cdot 2y dy = 2 \left(y + \frac{y^3}{3}\right) + c = 2 \left(\sqrt{t-1} + \frac{1}{3} \sqrt{(t-1)^3}\right)$$

Quindi l'integrale Jale

$$\frac{\ln^2 x}{2} \arctg \sqrt{\ln x - 1} - \frac{1}{4} \cdot 2 \left(\sqrt{\ln x - 1} + \frac{1}{3} \sqrt{(\ln x - 1)^3} \right) + c$$

e una particolare primitiva di $g(x)$ è data dalla funzione

$$G(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x \cdot \arctg \sqrt{\ln x - 1} - \frac{1}{2} \sqrt{\ln x - 1} - \frac{1}{6} \sqrt{(\ln x - 1)^3}.$$

ii) Perchè $D.E.(g) = [e, +\infty)$ (basta porre $\ln x - 1 \geq 0$
 g non è integrabile in $]0, 3]$ non essendo $\Rightarrow \ln x \geq 1 \Rightarrow x \geq e$)
definita in questo intervallo.

La funzione è invece definita e continua in $[3, +\infty)$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x) \arctg \sqrt{\ln x - 1}}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \\ 0 & \text{con ord} < \alpha > \alpha - \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0 \text{ piccolo}) \end{cases} \quad \text{se } \alpha > 0$$

g non è integ. se $\alpha \leq 1$ (perchè infinita o infinitesima
con ordine $< \alpha \leq 1$)

mentre è integrabile se $\alpha > 1$ (perchè infinitesima con
ordine $> \alpha - \varepsilon > 1$ con $\varepsilon > 0$ piccolo)