

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

21 settembre 2021

1. Risolvere la seguente equazione e rappresentare le soluzioni nel piano complesso

$$z^6 + i^9 z^4 + z^2 = \frac{1+i}{2-2i} + \frac{\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)^{10}}{2i} - i^{2021}.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$g(x) = \frac{(1 - \log_3 |x|)^{\sqrt{2^x - 1}}}{\log \left(4 - \log_{\frac{1}{2}} x\right)}$$

3. Studiare la funzione

$$y = \frac{5-x}{\sqrt{|x^2+x|}}.$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

4. Calcolare

$$\int \frac{\cos x - 2 \sin 2x - \cos^3 x}{\sin^4 x - 3 \sin^2 x - 4} dx.$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\sqrt{x} \left(e^{\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x}} - 1 \right)}{\ln x},$$

- i) calcolarne il limite per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow 1$;
ii) stabilire, giustificando la risposta, se la funzione è integrabile in $]1, 2]$ e in $[2, +\infty)$.

Suddivisione

1. Poiché

$$\frac{1+i}{2-2i} = \frac{(1+i)^2}{2(1-i)(1+i)} = \frac{1-1+2i}{2(1+1)} = \frac{i}{2}, \quad i^{2024} = i^{2020} \cdot i = (i^4)^{505} i = i$$

$$\frac{\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)^{10}}{2i} = \frac{\cos 2\pi + i \sin 2\pi}{2i} = \frac{1}{2i} = \frac{i^2}{2} = -\frac{1}{2},$$

l'equazione diventa

$$z^6 + i^5 z^4 + z^2 = \frac{i}{2} - \frac{i}{2} + i \Rightarrow z^6 + i z^4 + z^2 + i = 0 \Rightarrow$$

$$z^4(z^2 + i) + z^2 + i = 0 \Rightarrow (z^4 + 1)(z^2 + i) = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \vee z^2 = -i$$

$$z^4 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \left\{ \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \mid k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$$

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z_2 = -z_0$$

$$z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z_3 = -z_1$$

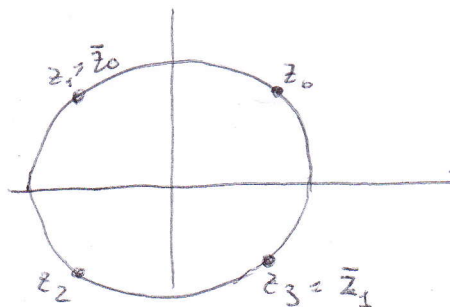
$$z^2 = -i \Rightarrow z = \sqrt{\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}} = \left\{ \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} \mid k \in \{0, 1\} \right\}$$

$$\bar{z}_0 = \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = z_1$$

$$\bar{z}_1 = \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi = +\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = z_3$$

L'equazione ha 6 radici complesse, 2 di molteplicità 1

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e 2 di molteplicità doppia $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



2. Studio separatamente ID del numeratore e del denominatore e poi ne faccio intersezione:

$$N: \begin{cases} 1 - \log_3 |x| > 0 \\ \sqrt{2^x - 1} \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1 - \log_3 |x| = 0 \\ \sqrt{2^x - 1} \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

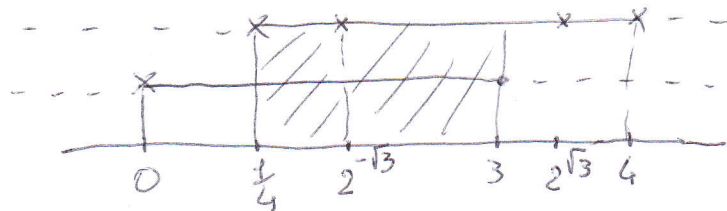
$$\begin{cases} \log_3 |x| < 1 \\ 2^x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \log_3 |x| = 1 \\ 2^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < |x| < 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |x| = 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(2)

$$0 < x < 3 \vee x = 3$$

le numeratore è definito $\forall x \in]0, 3]$

$$\Delta: \begin{cases} 4 - \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \\ \log(4 - \log_{\frac{1}{2}} x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2 \\ 4 - \log_{\frac{1}{2}} x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x < 4 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \neq \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x < 4 \\ x \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{\pm \sqrt{3}} \end{cases}$$



$$I\Delta(g) =]\frac{1}{4}, 2^{-\sqrt{3}}[\cup]2^{\sqrt{3}}, 3]$$

3. $I\Delta g: |x^2 + x| > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ Funzione né pari né dispari

$$y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x > 0 \\ x \neq 0, -1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 5[$$

$$y = 0 \Leftrightarrow x = 5 \quad (5, 0) \text{ intersezione con asse } x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - x}{\sqrt{|x^2 + x|}} = \frac{5}{0^+} = +\infty \quad \text{A.V. } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5 - x}{\sqrt{|x^2 + x|}} = \frac{6}{0^+} = +\infty \quad \text{A.V. } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - x}{\sqrt{|x^2 + x|}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{|x|} = -1 \quad y = -1 \text{ A.O.a. } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x}{\sqrt{|x^2 + x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x} = 1 \quad y = 1 \text{ A.O.a. } -\infty$$

$$y' = \frac{-\sqrt{|x^2 + x|} - (5 - x) \frac{1}{2\sqrt{|x^2 + x|}} \cdot \frac{x^2 + x}{|x^2 + x|} (2x + 1)}{|x^2 + x|}$$

$$= \frac{-2|x^2 + x|^2 - (5 - x)(x^2 + x)(2x + 1)}{2|x^2 + x|^2 \sqrt{|x^2 + x|}} = (x^2 + x) \frac{-2(x^2 + x) - (5 - x)(2x + 1)}{2|x^2 + x|^{5/2}}$$

$$y' = \frac{(x^2+x)(-11x-5)}{|x^2+x|^{5/2}}$$

$$ID(y') = ID(y)$$

3 pli angulosi o cuspidali

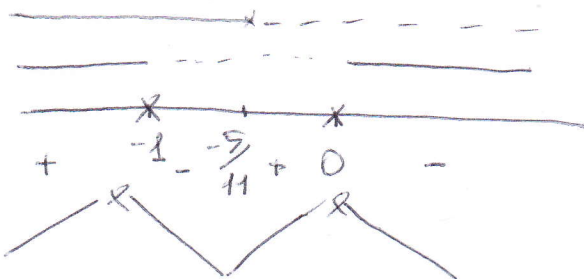
$$y' > 0 \Leftrightarrow (x^2+x)(-11x-5) > 0$$

$$x^2+x > 0 \quad x < -1 \vee x > 0$$

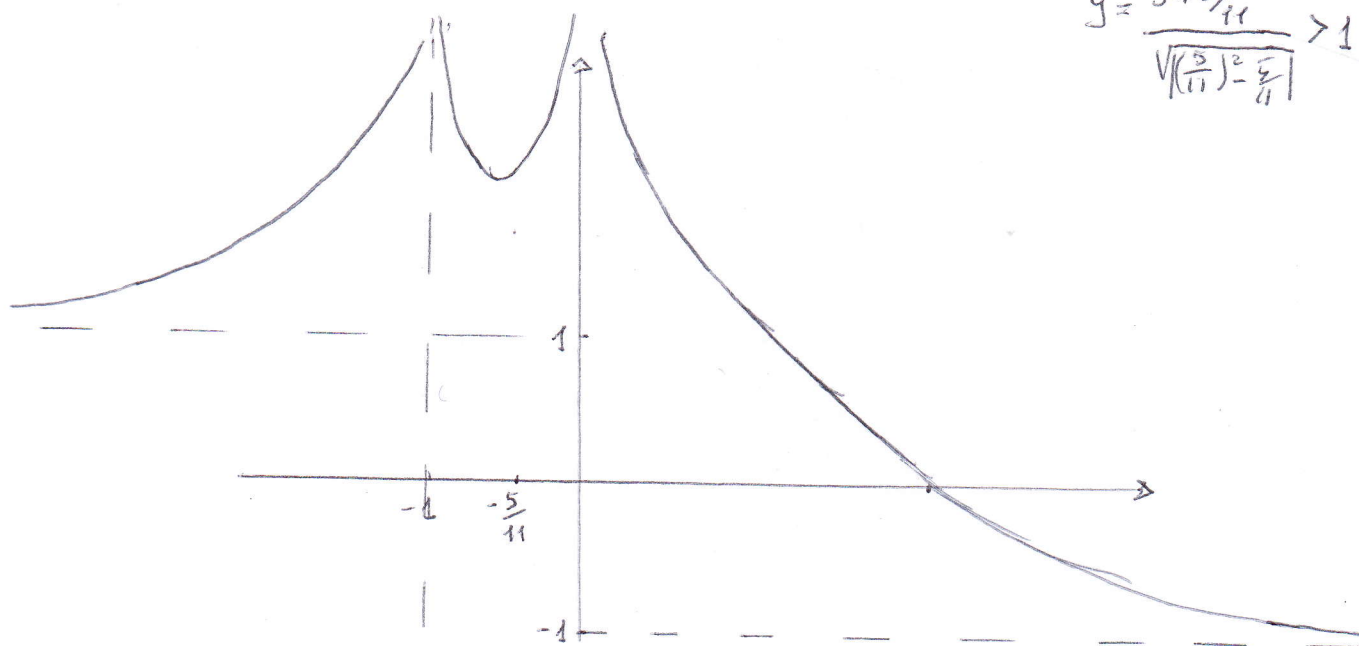
$$-11x-5 > 0 \quad x < -\frac{5}{11}$$

y cresce in $(-\infty, -1] \cup]-\frac{5}{11}, 0[$

y decresce in $]-1, -\frac{5}{11}[\cup]0, +\infty)$



$$u \begin{cases} x = -\frac{5}{11} \\ y = \frac{5 + \frac{5x}{11}}{\sqrt{(\frac{5}{11})^2 - \frac{x}{11}}} > 1 \end{cases}$$



4. Perché $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, l'integrale diventa

$$\int \frac{\cos x - 4 \sin x \cos x - \cos^3 x}{\sin^4 x - 3 \sin^2 x - 4} dx = \int \frac{(1 - 4 \sin x - \cos^2 x) \cos x}{\sin^4 x - 3 \sin^2 x - 4} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x}{\sin^4 x - 3 \sin^2 x - 4} \cos x dx = \int \frac{t^2 - 4t}{t^4 - 3t^2 - 4} dt$$

$$\text{pongo } \cos x = t$$

$$-\sin x dx = dt$$

Perché

$$t^4 - 3t^2 - 4 = z^2 - 3z - 4 = (z+1)(z-4) = (t^2+1)(t^2-4) = (t^2+1)(t+2)(t-2),$$

$\downarrow$
 $t^2 = z$

(4)

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -2A + 2B + D = 1 \\ A + B - 4C = -4 \\ -2A + 2B - 4D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -A - B \\ D = 1 + 2A - 2B \\ A + B + 4A + 4B = -4 \\ -2A + 2B - 4 - 8A + 8B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -A - B \\ D = 1 + 2A - 2B \\ B = \frac{-4 - 5A}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = - \frac{12}{205}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{3}{5} \\ B = \frac{-4 + 5 \cdot \frac{3}{5}}{5} = -\frac{1}{5} \\ C = +\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \\ D = 1 - \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{3}{5} \ln |t-2| - \frac{1}{5} \ln |t+2| + \frac{2}{5} \ln (t^2+1) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} t + \cos t$$

$$= -\frac{3}{5} \ln |\sec x - 2| - \frac{1}{5} \ln |\sec x + 2| + \frac{2}{5} \ln (\sec^2 x + 1) + \frac{1}{5} \arctan \sec x + C.$$

$$5. i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} (e^{\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(e^{\frac{\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x}}} - 1 \right) \cdot \frac{(\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x})}{\ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\ln x} + \sqrt{x})}{\ln x (\sqrt{x+\ln x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

 $\hookrightarrow 1$

per $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+\ln x} - \sqrt{x} \rightarrow 0$ se $x \rightarrow +\infty$ per ordine essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \ln x} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x - x}{\sqrt{x + \ln x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = 0 \text{ per ordini.} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} (e^{\sqrt{x + \ln x} - \sqrt{x}} - 1)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sqrt{x + \ln x} - \sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x + \ln x} - \sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x + \ln x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \ln x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x + \ln x} + \sqrt{x}) \ln x} \\ &\downarrow \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \ln x - x}{(\sqrt{x + \ln x} + \sqrt{x}) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x + \ln x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ii) Poiché h è continua in $]1, 2]$ e $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, h è prolungabile per continuità per $x = 1$ e quindi è ~~continua~~ integrabile in senso classico e in senso improprio in $]1, 2]$. Poiché h è continua in $[2, +\infty)$ ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{2} \neq 0$, h non è integrabile in senso improprio in $[2, +\infty)$.