

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

16 luglio 2021

1. Risolvere la seguente equazione nel piano complesso

$$iz^4 + 3z^2 + 10i \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{60} = 0$$

2. Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + x - 2)^{\frac{1}{x-1}} & x > 1 \\ 0 & x = 1 \\ \frac{x^3 - 1}{\ln x} & x < 1 \end{cases}.$$

3. Determinare il dominio della funzione

$$g(x) = \left(4 \sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1) \sin x - \sqrt{3} \right)^{|x|}.$$

4. Studiare la funzione

$$y = \sqrt{e^{|x^2-3|-1} - 1}.$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare

$$\int \arcsin(2x + 1) dx.$$

6. Data la funzione

$$h(x) = \ln_x((1-x)(x^2 + 2x))$$

stabilire, giustificando la risposta, se la funzione è integrabile in $] -2, 0[$ e in $]0, \frac{1}{2}]$.

Solgimento

1. Poiché $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{60} = \cos 60 \cdot \frac{\pi}{3} + i \sin 60 \cdot \frac{\pi}{3} = 1$

è equazione di Senfa

$iz^4 + 3z^2 + 10i = 0$. Posto $w = z^2$ ha

$$w_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 40i^2}}{2i} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2i} = \frac{-3 \pm 7}{2i} = \begin{cases} \frac{-5}{i} = 5i \\ \frac{2}{i} = -2i \end{cases}$$

Segue che

$$\begin{aligned} z^2 = 5i &\Rightarrow z = \sqrt{5i} = \left\{ \sqrt{5} \left(\cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) \mid k \in \{0, 1\} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \sqrt{5} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right\} \\ &= \pm \sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} (1+i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^2 = -2i &\Rightarrow z = \sqrt{-2i} = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) \mid k \in \{0, 1\} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right\} \\ &= \pm \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm (1-i). \end{aligned}$$

L'equazione ha 4 radici $\pm \frac{\sqrt{10}}{2} (1+i), \pm (1-i)$.

2. Poiché la funzione cambia espressione per $x = 1$, dobbiamo studiare la continuità in questo punto. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{\ln x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{\ln x} = 1 \cdot 3 = 3$$

essendo $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x-1=y} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$; inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+x-2)^{\frac{1}{x-1}} = 0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1} \ln(x^2+x-2)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x^2+x-2)}{x-1}} = e^{-\infty} = 0.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ sono diversi, f non ha

limite per $x \rightarrow 1$ e quindi non è continua ma ha discont. di I^a specie.

3. La funzione è definita quando

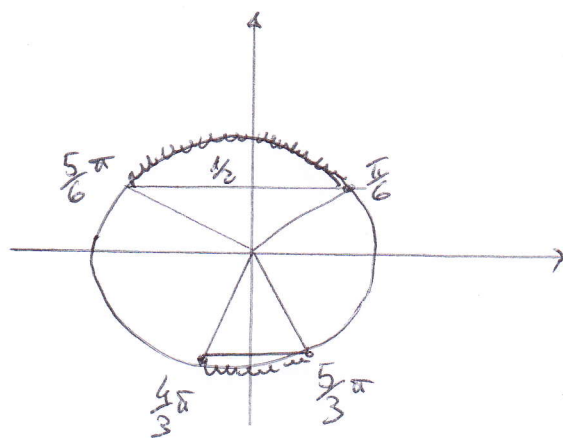
(2)

$$\begin{cases} 4 \sin^2 x + 2(\sqrt{3}-1) \sin x - \sqrt{3} > 0 \\ |x| \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} 4 \sin^2 x + 2(\sqrt{3}-1) \sin x - \sqrt{3} = 0 \\ |x| > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x > \frac{1}{2} \quad \vee \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \vee \sin x = \frac{1}{2}$$

essendo $\sin x_{1/2} = \frac{-(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{-(\sqrt{3}-1) \pm (\sqrt{3}-1)}{4} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$



Poiché

$$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right[$$

$$\sin x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[$$

e per $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = \frac{1}{2}$ si ha $x \neq 0$, si conclude che

$$\text{ID}(g) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right] \right).$$

3. ID: $e^{|x^2-3|-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{|x^2-3|-1} \geq 1 \Leftrightarrow |x^2-3|-1 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $x^2-3 \leq -1 \vee x^2-3 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \vee x^2 \geq 4$

ID = $(-\infty, -2] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [2, +\infty)$

Perche' f e' pari, la studio solo per $x \geq 0$.

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in ID \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2, \pm \sqrt{2}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = \sqrt{e^{|x^2-3|-1}} \end{cases} \quad (\pm \sqrt{2}, 0) \quad (\pm 2, 0) \text{ intersezione con asse } x$
 $(0, \sqrt{e^2-1}) \text{ intersezione con asse } y$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{|x^2-3|-1}} - 1 = +\infty$ con ordine grande $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
 $\Rightarrow$ ~~A~~ as. obliq. ne' obliq.

Inoltre ~~A~~ as. verticali perche' ~~A~~ pli di accumulazione al finito per ID e $\notin ID$.

$y' = \frac{1}{2\sqrt{e^{|x^2-3|-1}} - 1} \cdot e^{|x^2-3|-1} \cdot \frac{x^2-3}{|x^2-3|} \cdot 2x \quad \forall x \in ID \Rightarrow$
 $\begin{cases} e^{|x^2-3|-1} \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 2, \pm \sqrt{2} \\ x^2-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Perche' $\pm \sqrt{3} \notin ID(y)$, segue che

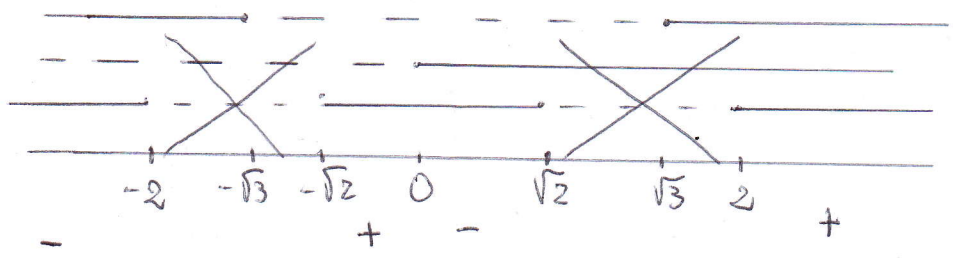
$ID(y') = (-\infty, -2[\cup]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup]2, +\infty)$

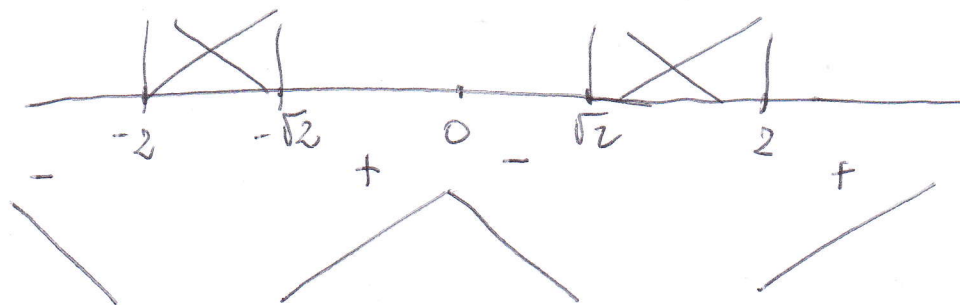
3 punti $x = \pm \sqrt{2}, x = \pm 2$ sono di semicuspide perche'

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} y' = +\infty \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2\sqrt{2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2} y' = +\infty \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = +\infty.$

$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \cdot e^{\dots} \cdot \frac{x^2-3}{|x^2-3|} \cdot 2x > 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) > 0$

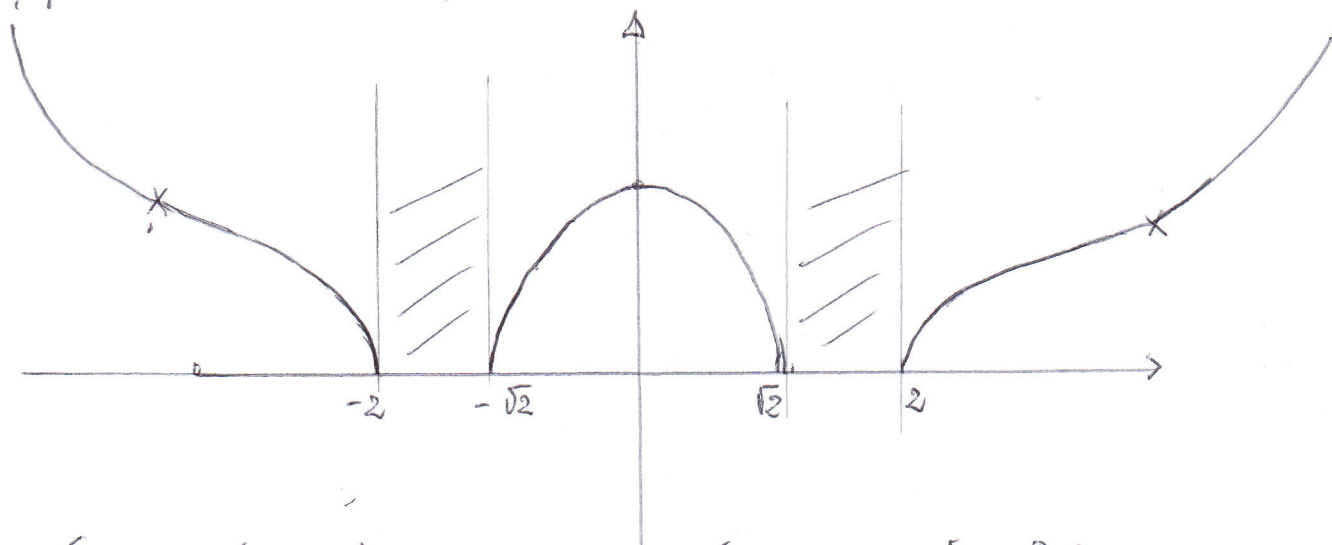
$x > 0$
 $x^2 > 3$





$$M \begin{cases} x=0 \\ y=f(0) \end{cases}$$

Ponettiamo lo studio del segno di y'' . Si noti però che la funzione per $x \geq 2$ parte con tangente verticale quindi concava mentre per $x \rightarrow +\infty$ è convessa perché si comporta come $e^{\sqrt{x^2}} = e^x$. Si deduce l'esistenza di un flesso per $x > 2$ e, per simmetria, anche per $x < -2$.



$$5. \int \arcsin(2x+1) dx = x \arcsin(2x+1) - \int \frac{2x}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} dx$$

Risolvo da parte il 2° integrale ponendo

$$2x+1 = t \Rightarrow 2x = t-1, \quad dx = \frac{1}{2} dt. \quad \text{Si ha quindi}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} dx &= \int \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{4} \int \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \arcsin t + \frac{1}{4} \frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \arcsin(2x+1) + \frac{1}{2} \sqrt{1-(2x+1)^2} + C \end{aligned}$$

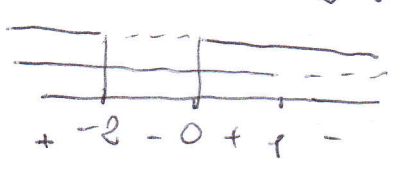
Concludendo:

$$\int \arcsin(2x+1) dx = x \arcsin(2x+1) + \frac{1}{2} \arcsin(2x+1) + \frac{1}{2} \sqrt{1-(2x+1)^2} + C.$$

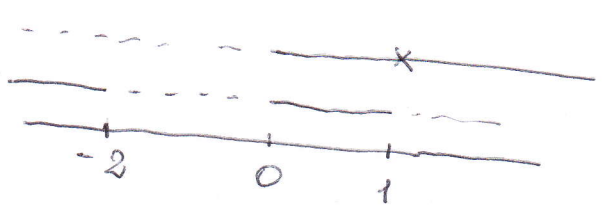
6. Poiché per formula del cambiamento di base si ha

$$h(x) = \frac{\ln((1-x)(x^2+2x))}{\ln x} \quad \text{la funzione è definita per}$$

$$\begin{cases} (1-x)(x^2+2x) > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} 1-x > 0 &\Leftrightarrow x < 1 \\ x^2+2x > 0 &\Leftrightarrow x < -2 \vee x > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x < -2 \vee 0 < x < 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$



$$ID(h) =]0, 1[$$

Non ha senso studiare l'integrabilità di h in $]-2, 0[$ perché la funzione non è definita in tale intervallo. Vediamo invece se lo è in $]0, 1[$ dove h è definita e continua. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln((1-x)(x^2+2x))}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1-x)}{\ln x} + \frac{\ln(x+2)}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x} \right]$$

si noti che in $]0, 1[$ i tre argomenti sono positivi;

$$= \frac{0}{-\infty} + \frac{\ln 2}{-\infty} + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

(h è prolungabile per continuità per $x \rightarrow 0^+$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln((1-x)(x+2))}{\ln x} + 1 = \frac{-\infty}{0^-} + 1 = +\infty \quad \text{con ord} > 1$$

perché
$$\frac{\ln((1-x)(x+2))}{\ln x} = \underbrace{\ln(1-x)}_{-\infty \text{ con ord } \ln 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{-\infty \text{ con ord } 1} + \underbrace{\frac{\ln(x+2)}{\ln x}}_{-\infty \text{ con ord } 1}$$

ordine delle somme = ord $\frac{\ln(1-x)}{\ln x} > 1$, si conclude che h non è integrabile in $]0, 1[$.