

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

2 luglio 2021

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$2 \bar{z}^2 - \operatorname{Re}(z^2 - z) + i \operatorname{Im}(z^2) = 3 \left(\frac{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}} \right)^{72} - z$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x - \frac{x^2}{2}}{e^{-x^2} - 1 + (\arctan x)(\arcsin x)}.$$

3. Studiare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \sqrt{\arccos \frac{|x+1|}{x-2} - \frac{\pi}{2}}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2}{x} + \left| \ln \frac{2x^2 - 5x + 4}{x^2} \right|.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \tan x \sqrt{\cos^2 x + 2 \sin^2 x},$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se g è integrabile in senso improprio in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Svolgimento

1. Posto $z = a + ib$, si ha: $\bar{z}^2 = (a - ib)^2 = a^2 + i^2 b^2 - 2abi = a^2 - b^2 - 2abi$

$$\operatorname{Re}(z^2 - z) = \operatorname{Re}(a^2 - b^2 + 2abi - a - ib) = a^2 - b^2 - a$$

$$\operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}(a^2 - b^2 + 2abi) = 2ab$$

$$\left(\frac{\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi}{\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi} \right)^{72} = \cos\left(\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{7}{12}\pi\right)72\right) + i \sin\left(\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{7}{12}\pi\right)72\right) = \cos 6\pi + i \sin 6\pi = 1$$

e quindi l'equazione diventa

$$2(a^2 - b^2 - 2abi) - (a^2 - b^2 - a) + i(2ab) = 3 - a - ib \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 2b^2 - a^2 + b^2 + a = 3 - a \\ -4ab + 2ab = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a - 3 = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a^2 + 2a - 3 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - b^2 + 1 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$a_{1/2} = -1 \pm 2 = \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$b^2 = \frac{1}{4} - 2 < 0 \quad \emptyset$$

l'eq. ha 2 radici

$$\text{real } z_1 = -3, z_2 = 1.$$

2. Osservo che

$$e^{-x^2} - 1 - (\operatorname{arctg} x)(\operatorname{arcsen} x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4) - 1 +$$

$$\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= -\cancel{x} + \frac{x^4}{2} + \cancel{x} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \sim \frac{1}{3}x^4$$

Per studiare l'ordine del denominatore, osservo che

$$\operatorname{sen}(e^x - 1) - x - \frac{x^2}{2} = e^x - 1 - \frac{1}{6}(e^x - 1)^3 + o(e^x - 1)^4 = x - \frac{x^2}{2}$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + o(x^4)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{6}\left[\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + 3\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\frac{x^3}{6} + 3\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\frac{x^6}{36}\right] + o(x^4) = x - \frac{x^2}{2}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$\begin{aligned} \sin(e^x - 1) - x - \frac{x^2}{2} &= \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \underbrace{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{6} \left(\cancel{x^3} + \frac{3}{2} x^4 \right) + o(x^4) - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} \right) x^4 + o(x^4) \sim -\frac{5}{24} x^4 \end{aligned}$$

Si potrebbe anche calcolare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \sin(e^x - 1)$ applicando le formule di Taylor.

Poiché $f'(x) = e^x \cos(e^x - 1)$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = e^x [\cos(e^x - 1) - e^x \sin(e^x - 1)]$ $f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x [(1 - e^{2x}) \cos(e^x - 1) - 3e^x \sin(e^x - 1)]$ $f'''(0) = 0$

$f^{(iv)}(x) = e^x [(1 - e^{2x}) \cos(e^x - 1) - 3e^x \sin(e^x - 1) - 2e^{2x} \cos(e^x - 1) - (1 - e^{2x}) e^{2x} \sin(e^x - 1) - 3e^x \sin(e^x - 1) - 3e^{2x} \cos(e^x - 1)]$

$f^{(iv)}(0) = -2 - 3 = -5$

si ha $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{24}x^4 + o(x^4)$

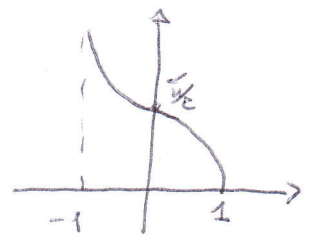
ossia $\sin(e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$ stesso risultato ottenuto prima usando sviluppo rot.

Conclusione

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x - \frac{x^2}{2}}{e^{-x^2} - 1 - (\arcsin x)(\arcsin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{24}x^4}{\frac{1}{3}x^4} = -\frac{5}{8}$

3. $\arccos \frac{|x+1|}{x-2} - \frac{\pi}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \arccos \frac{|x+1|}{x-2} \geq \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{|x+1|}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x+1|}{x-2} \leq 0 & (a) \\ \frac{|x+1|}{x-2} \geq -1 & (b) \end{cases}$

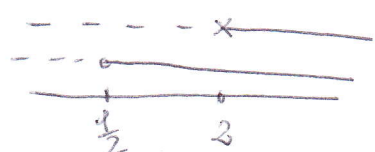


(a) $|x+1| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $x-2 > 0 \quad x > 2 \Rightarrow$ il rapporto è $\leq 0 \Leftrightarrow x < 2$

$$(b) \frac{|x+1|}{x-2} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{|x+1|+x-2}{x-2} \geq 0$$

$$N \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1+x-2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ -x-1+x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$D > 0 \Leftrightarrow x > 2$$



$$(b) \text{ vale } \forall x \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{Conclusione } \begin{cases} x < 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \vee x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \quad ID = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

$$4. ID \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2x^2-5x+4}{x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x^2-5x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0 \quad ID = \mathbb{R}^*$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ poiché } \Delta < 0$$

Non si riesce a studiare intersezione con asse x ($f(x)=0$)
né positiva ($f(x) > 0$).

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} + \left| \ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2} \right| = \ln 2$$

$y = \ln 2$ As. orizz. completo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} + \left| \ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2} \right| = -\infty + \infty = -\infty$$

per gli ordini
perché $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$
con ord 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2} = +\infty$$

con ordine lento

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} + \left| \ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2} \right| = +\infty + \infty = +\infty$$

$x = 0$ A. V. completo

$$y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{\ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2}}{\left| \ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2} \right|} \cdot \frac{x^2}{2x^2-5x+4} \cdot \frac{(4x-5)x^2 - 2x(2x^2-5x+4)}{x^4}$$

$$\text{cioè } y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{\ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2}}{\left| \ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2} \right|} \cdot \frac{5x^2-8x}{x^2(2x^2-5x+4)}$$

4

Si noti che y' ha senso se $\begin{cases} x \neq 0 \\ \ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2} \neq 0 \Rightarrow \frac{2x^2-5x+4}{x^2} \neq 1 \Rightarrow \end{cases}$

$$\text{cioè } ID(y') = ID(y) - \{1, 4\} \quad x^2-5x+4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 4$$

Si osserva che

$$\ln \frac{2x^2-5x+4}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-5x+4}{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2-5x+4 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 4$$

Dunque

$$y' = \begin{cases} -\frac{2}{x^2} + \frac{5x^2-8x}{x^2(2x^2-5x+4)} & \text{se } x < 1 \vee x > 4 \\ -\frac{2}{x^2} + \frac{5x^2-8x}{x^2(2x^2-5x+4)} & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = -2 + \frac{-3}{1} = -5, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y' = -2 - \frac{-3}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ pto angoloso}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} y' = -\frac{2}{16} - \frac{5 \cdot 16 - 8 \cdot 4}{16 \cdot (32 - 20 + 4)} = -\frac{5}{16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} y' = -\frac{2}{16} + \frac{5 \cdot 16 - 8 \cdot 4}{16 \cdot (32 - 20 + 4)} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ pto angoloso}$$

Inoltre

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > 4 \\ -\frac{2}{x^2} + \frac{5x^2-8x}{x^2(2x^2-5x+4)} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 < x < 4 \\ -\frac{2}{x^2} - \frac{5x^2-8x}{x^2(2x^2-5x+4)} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > 4 \\ x^2+2x-8 > 0 \\ -1 \pm 3 < \frac{-4}{2} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} 1 < x < 4 \\ 9x^2-18x+8 < 0 \\ \frac{9 \pm 3}{9} < \frac{2}{3} \end{cases}$$

(però logliare il denominatore perché sempre $> 0 \forall x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > 4 \\ x < -4 \vee x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 < x < 4 \\ \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4 \vee 1 < x < \frac{4}{3}$$

