

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

18 giugno 2021

1. Risolvere la seguente equazione nel piano complesso

$$4z + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} \right)^{12} + i^{2021} = -2z\bar{z}$$

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2 - 3x - 4} + 4 - x \right)^{\sqrt{4|x| - 2x^2}}.$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x - x^2) - x + \sin^2 x}{e^x - \sqrt{1 + 2x}}.$$

4. Studiare la funzione

$$y = \ln \left| \frac{\ln |x| + 1}{\ln |x| - 1} \right|.$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare

$$\int \frac{\ln x + 2}{x(\ln^2 x - 1)^2} dx.$$

Stabilire poi, giustificando la risposta, se la funzione integranda è definita e integrabile in $]e, +\infty)$.

Solgimento

1. Poiché $\left(\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} \right)^{12} = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{12} = \cos \left(12 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(12 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = 1$

mentre $i^{2021} = (i^4)^{505} \cdot i = 1 \cdot i = i$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

l'equazione diventa $4z + 1 + i = -2|z|^2$ e poichè $z = a + ib$

in Re $4a + 4bi + 1 + i = -2a^2 - 2b^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4a + 1 = -2a^2 - 2b^2 \\ 4b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 4a + 1 + \frac{1}{8} = 0 \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2a^2 + 4a + \frac{9}{8} = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \frac{9}{4}}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

L'equazione ha 2 radici complesse

$$z_1 = -1 - \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{4}i, \quad z_2 = -1 + \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{4}i$$

2. $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x - 4} + 4 - x > 0 \\ 4^{|x|} - 2^{x^2} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x - 4} + 4 - x = 0 \\ 4^{|x|} - 2^{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq x - 4 \\ 2^{2|x|} \geq 2^{x^2} \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x - 4} = x - 4 \\ 2^{2|x|} > 2^{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x - 4 < 0 \\ 2|x| \geq x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 > (x - 4)^2 \\ 2|x| \geq x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = (x - 4)^2 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ 2|x| > x^2 \end{cases}$$

Poichè $x^2 - 2|x| \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$, in Re

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 4 \\ x < 4 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 3x - 4 > (x - 4)^2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = (x - 4)^2 \\ x \leq -1 \vee x \geq 4 \\ x \geq 4 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$-2 \leq x \leq -1$$

$\emptyset$ (1° e 3° diseq. sono incompatibili)

$\emptyset$ (3° e 4° diseq. incompatibili)

$$ID = [-2, -1]$$

3. Poiché per $y \rightarrow 0$ si ha usando la formula di Taylor:

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

$$\text{sen } y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$$

$$e^y = 1 + y + y^2 + o(y^2)$$

$$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)y^2 + o(y^2)$$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - x^2 - \frac{1}{2}(\cancel{x} - x^2)^2 - \cancel{x} + \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^2)}{\cancel{1+x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{1}{2}\cancel{x} + \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{-x^2} - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \cancel{x^2} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^4}{18} + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \quad \text{trascuro gli infinitesimi di ordine superiore}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

4. ID: $\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|x| \neq -1 \\ \ln|x| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \neq e^{-1} \\ |x| \neq e \\ |x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm e^{-1} \\ x \neq \pm e \\ x \neq 0 \end{cases}$

ID = $\mathbb{R} - \{\pm e, \pm e^{-1}, 0\}$ insieme simmetrico rispetto a 0.

Poiché f è pari, studio la funzione per $x > 0$ e poi ne ribalto il grafico rispetto all'asse y .

Studio dunque la funzione in $]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, e[\cup]e, +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{y = \ln x} \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{y = \ln x} \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = \lim_{y \rightarrow -\infty} 1 = 0$ f prolungabile per continuità per $x \rightarrow 0^+$

$\lim_{x \rightarrow e^{-1}} \lim_{y = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}} \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{y = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}} |y| = -\infty$ $x = e^{-1}$ A.V. completo

$\lim_{x \rightarrow e^+} \lim_{y = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}} \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \lim_{y = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}} |y| = +\infty$ $x = e$ A.V. completo

(3)

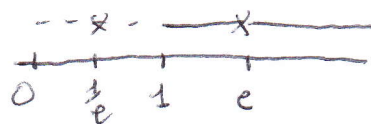
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = \ln 1 = 0 \quad y = \ln x$$

$$y > 0 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} < -1 \vee \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x + 1 + \ln x - 1}{\ln x - 1} < 0 \vee \frac{\ln x + 1 - \ln x + 1}{\ln x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{\ln x - 1} < 0 \vee \frac{2}{\ln x - 1} > 0$$

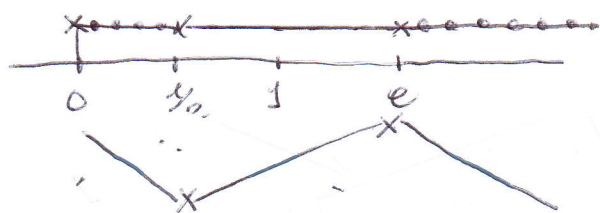
$$\Leftrightarrow 0 < \ln x < 1 \vee \ln x > 1 \Leftrightarrow 1 < x < e \vee x > e$$

$$y > 0 \quad \forall x \in]1, e[\cup]e, +\infty[\quad y = 0 \quad \text{per } x = 1$$



$$y' = \frac{1}{\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-2}{x(\ln^2 x - 1)} \quad \text{ID}(y') = \text{ID}(y)$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 < 0 \quad (x > 0) \Rightarrow -1 < \ln x < +1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e$$



$x = e^{-1}$ e $x = e$ non appartengono al dominio: Δ max o min. rel.

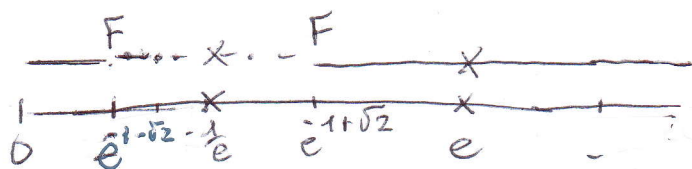
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x(\ln^2 x - 1)} = -\infty \quad \text{per gli ordini}$$

$$y'' = 2 \frac{1 + (\ln^2 x - 1) + \cancel{2\ln x} \cdot \cancel{\frac{1}{x}}}{(\ln^2 x - 1)^2} = +2 \frac{\ln^2 x + 2\ln x - 1}{(\ln^2 x - 1)^2}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x + 2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 + \sqrt{2} \vee \ln x > -1 + \sqrt{2}$$

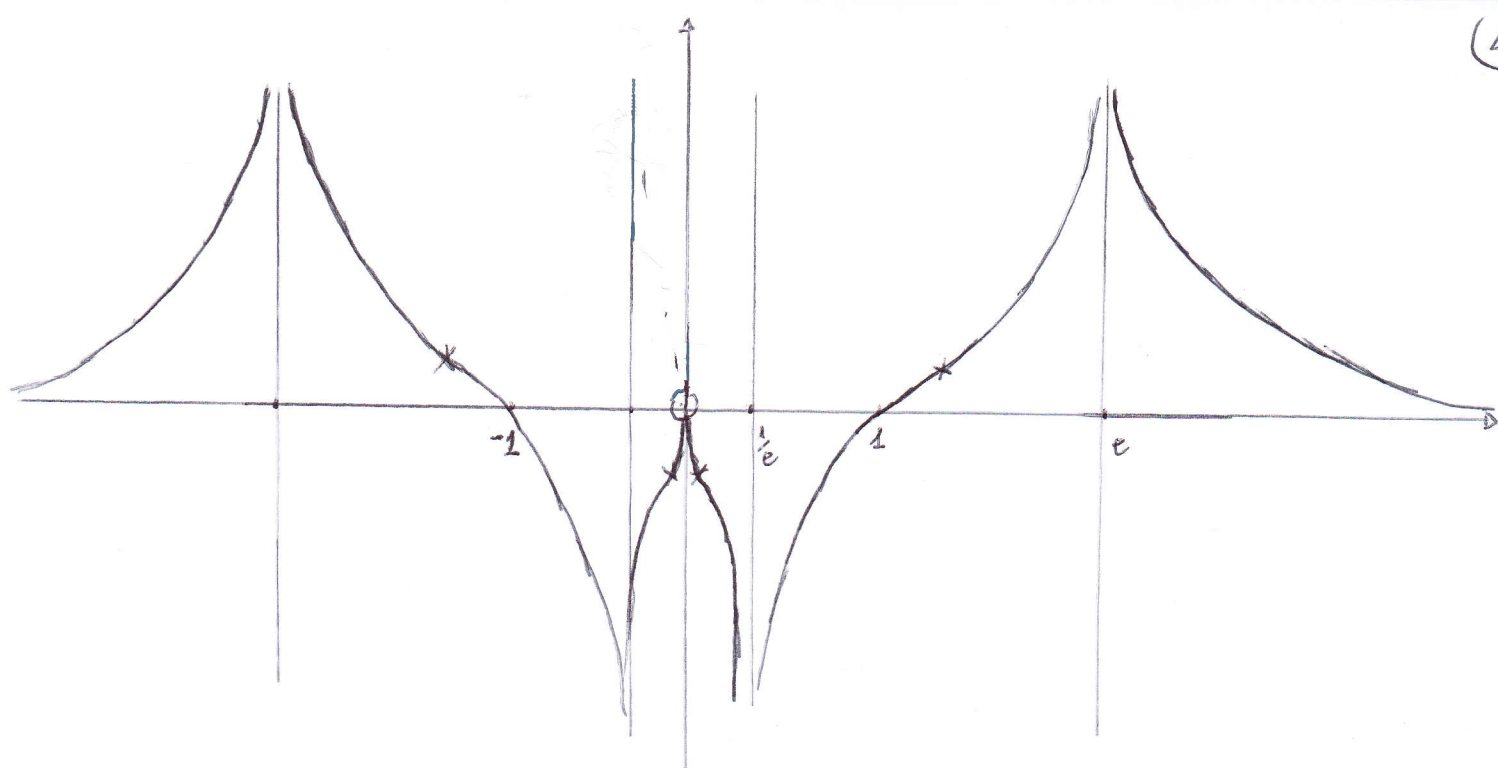
$$\ln x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$0 < x < e^{-1+\sqrt{2}} \vee x > e^{-1+\sqrt{2}}$$



f convessa in $]0, e^{-1-\sqrt{2}}[$,
in $]e^{-1+\sqrt{2}}, e[$ e $]e, +\infty[$.





5. Posto $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$ e' integrale di Riemann

$$\int \frac{\ln x + 2}{x(\ln^2 x - 1)^2} dx = \int \frac{t+2}{(t^2-1)^2} dt = \int \frac{t+2}{(t-1)^2(t+1)^2} dt. \quad (*)$$

Per Heaviside $\exists A, B, C, D$ tali che

$$\frac{t+2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1}$$

$$= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C(t-1) - 2t(C+D)}{(t^2-1)^2} \Rightarrow$$

$$t+2 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)(t-1)^2 + C(t-1)^2 - 2t(C+D) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B-C=D \\ -A-B-2D=1 \\ -A-C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=A-B=2A \\ -A+A-2D=1 \\ -A-2A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2/3 \\ C=-2/3 \\ D=-1/2 \\ A=-2/3 \end{cases}$$

$$(*) = \int \left(\frac{-2/3}{t-1} + \frac{2/3}{t+1} + \frac{d}{dt} \frac{-2/3 t - 1/2}{t^2-1} \right) dt = -\frac{2}{3} \ln|t-1| + \frac{2}{3} \ln|t+1| - \frac{2/3 t + 1/2}{t^2-1} + C$$

$$= \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right| - \frac{2/3 \ln x + 1/2}{\ln^2 x - 1} + C.$$

Perche' $ID \left(\frac{\ln x + 2}{x(\ln^2 x - 1)} \right) =]0, 1/e[\cup]e, e[\cup]e, +\infty)$

f e' continua in $]e, +\infty)$.

Inoltre

(5)

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x + 2}{x(\ln^2 x - 1)} = \lim_{x \rightarrow e^+} \underbrace{\frac{\ln x + 2}{x(\ln x + 1)}}_{\frac{3}{2e}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln x - 1}}_{\frac{1}{0^+}} = +\infty$$

con ordine 1 poiché

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e}.$$

Segue che f non è integrabile ^(i.s.i.) in un intervallo del tipo $[e, \kappa]$ con $\kappa > e$ e quindi non è integrabile in $[e, +\infty)$.