

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

18 febbraio 2021

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso.

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14}} \right)^{28} + z + z^2 = |z|^2$$

2. Calcolare il seguente limite al variare del parametro a (se si è in difficoltà studiare solo il caso $a=2$)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x^3 - 1) + (\sqrt{x} - 1)^a}{\ln^2(2x - 1) - \ln^2(3x - 2) + \ln(x^4 - 2x^2 + 2)}.$$

3. Studiare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \sqrt{\ln \ln_{\frac{1}{2}} \frac{2 + \sqrt{x}}{x}}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = 1 + x - \ln(e^x - 1)^2 - 6e^{-x}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\ln^3 x + \ln x}{x(\ln x - 1)^4},$$

- i) calcolare l'integrale indefinito;
ii) dire se g è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$, in $[1, e[$ e in $]e, +\infty)$.

Solgimento

1. Poiché

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14}} \right)^{28} = \left(\cos \left(\frac{\frac{\pi}{7}}{\frac{\pi}{14}} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{7}}{\frac{\pi}{14}} \right) \right)^{28} = \cos \left(28 \cdot \frac{\pi}{14} \right) + i \sin \left(28 \cdot \frac{\pi}{14} \right) = 1,$$

posto $z = a + ib \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2$, $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, e' equazione di secondo

$$1 + a + ib + a^2 - b^2 + 2abi = a^2 + b^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 + a - 2b^2 = 0 \\ b + 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a - 2b^2 = 0 \\ b(1 + 2a) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2b^2 = \frac{1}{2} \text{ cioè } b = \pm \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'equazione ha 3 radici

$$z_1 = -1, \quad z_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

2. Studio l'ordine del numeratore e del denominatore.

Poiché per $x \rightarrow 1$:

$$\ln^2(x^3 - 1) \sim (x^3 - 1)^2 = (x - 1)^2 (x^2 + x + 1)^2 \sim 9(x - 1)^2$$

$$(\sqrt{x} - 1)^a = \left(\frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \right)^a = \frac{(x - 1)^a}{(\sqrt{x} + 1)^a} \approx \frac{1}{2^a} (x - 1)^a$$

$$\text{segue che } \text{ord}(\text{Numeratore}) = \begin{cases} \min\{2, 2\} & \text{se } a \neq 2 \\ \geq \min\{a, 2\} & \text{se } a = 2 \end{cases}$$

In realtà se $a = 2$ il numeratore ha ancora ordine = 2 essendo la sua parte principale $(9 + \frac{1}{2}a)(x - 1)^2 \neq 0$.

$$\text{Conclusione: } \text{ord}(\text{Numeratore}) = \begin{cases} a (\leq 2) & \text{se } a \leq 2 \\ 2 & \text{se } a > 2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda invece il denominatore, essendo $\ln(1+y) \sim y$ se $y \rightarrow 0$, si ha che per $x \rightarrow 1$

$$\ln^2(2x - 1) = \ln^2(1 + 2(x - 1)) \sim (2(x - 1))^2 = 4(x - 1)^2$$

$$\ln^2(3x - 2) = \ln^2(1 + 3(x - 1)) \sim (3(x - 1))^2 = 9(x - 1)^2$$

$$\ln(x^4 - 2x^2 + 2) = \ln(1 + (x^2 - 1)^2) \sim (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2 \sim 4(x-1)^2$$

quindi

$$\ln^2(2x-1)^2 - \ln^2(3x-2) + \ln(x^4 - 2x^2 + 2) \sim (4 - 9 + 4)(x-1)^2 = -(x-1)^2$$

Se esprime la potenza diversa, trascurando infinitesimi di ord. sup.:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9(x-1)^2 + \frac{1}{2}a(x-1)^a}{-(x-1)^2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9(x-1)^2}{-(x-1)^2} = -9 & \text{se } a > 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(9 + \frac{1}{2}a)(x-1)^2}{-(x-1)^2} = -\frac{37}{2} & \text{se } a = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}a(x-1)^a}{-(x-1)^2} = -\infty & \text{se } a < 2 \end{cases}$$

(Si vuole che se $a \in \mathbb{R}$, il limite ha senso se $x-1 > 0$ e quando si tratta di un limite solo da destra).

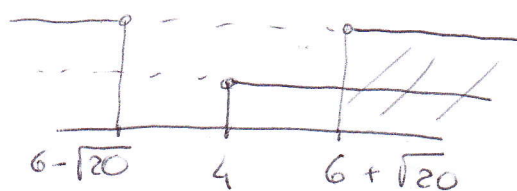
$$3. \ln \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2+\sqrt{x}}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2+\sqrt{x}}{x} \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2+\sqrt{x}}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{2+\sqrt{x}}{x} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} N > 0 & \sqrt{x} > -2 \Rightarrow x \geq 0 \\ D > 0 & x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{matrix} \Rightarrow x > 0$$

$$\frac{2+\sqrt{x}}{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4+2\sqrt{x}-x}{2x} \leq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq x-4 \quad (\text{volgo denominatore } > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-4 \geq 0 \\ 4x \leq x^2 - 8x + 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 12x + 16 \geq 0 \end{cases} \quad x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{20}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 6 - \sqrt{20} \vee x \geq 6 + \sqrt{20} \end{cases}$$



$$x \geq 6 + \sqrt{20}$$

$$ID \geq [6 + \sqrt{20}, +\infty)$$

$$4. (e^x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad ID = \mathbb{R}^*$$

(3)

f non e' ne' pari ne' dispari

Non studio positività ne' intersezioni con asse x poiché la disequazione $f(x) > 0$ o l'eq. $f(x) = 0$ non si possono studiare direttamente.

Asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1+x - \underbrace{\ln(e^x - 1)^2}_{\substack{\hookrightarrow \ln 1 = 0}} - \underbrace{6 \frac{e^{-x}}{x}}_{\substack{\hookrightarrow +\infty}} = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{1+x}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} - \underbrace{\ln(e^x - 1)^2}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} - \underbrace{6 \frac{e^{-x}}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = +\infty - \infty = -\infty \quad \text{per gli ordini.}$$

poiché $\ln(e^x - 1)^2 \approx 2 \ln(e^x - 1) \approx 2 \ln e^x = 2x$ se $x \rightarrow +\infty$

Asintoti orizzontali. Vediamo se ci sono asintoti obliqui

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{1}{x} + 1}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{\frac{\ln(e^x - 1)^2}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{6 \frac{e^{-x}}{x}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{+\infty}{-\infty}}} = +\infty \quad \text{per ordini}$$

As. obliquo a $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{x} + 1}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{\frac{2 \ln(e^x - 1)}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{6 \frac{e^{-x}}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{x}\right) = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x - 2 \ln(e^x - 1) - \underbrace{6 \frac{e^{-x}}{x}}_{\substack{\hookrightarrow 0}} + x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 2x - 2x = 1 \end{aligned}$$

$y = -x + 1$
As. obliquo a $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{1+x}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{\ln(e^x - 1)^2}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}} - \underbrace{6 \frac{e^{-x}}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 6}} = +\infty \quad x=0 \quad \text{A.V. completo}$$

Studio delle monotonie

$$y' = 1 - \frac{1}{(e^x - 1)^2} \cdot 2(e^x - 1) \cdot e^x + 6 e^{-x} = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1} + 6 e^{-x} \quad \forall x \neq 0$$

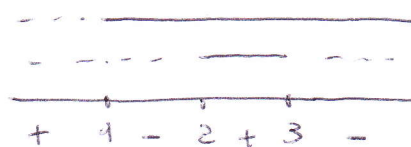
$$1 - \frac{2e^x}{e^x-1} + \frac{6}{e^x} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - e^x - 2e^{2x} + 6e^x - 6}{e^x(e^x-1)} > 0$$

$$N > 0 \quad -e^{2x} + 5e^x - 6 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$$

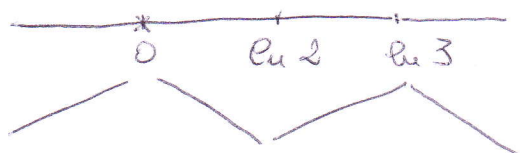
$$\frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{2}{3}$$

$$2 < e^x < 3$$

$$D > 0 \quad e^x > 1$$



$$y' > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \vee 2 < e^x < 3 \Leftrightarrow x < 0 \vee \ln 2 < x < \ln 3$$



$$M \begin{cases} x = \ln 2 \\ y = 1 + \ln 2 - \ln(2-1)^2 - \frac{6}{2} = -2 + \ln 2 \end{cases}$$

$$\hat{0}$$

$$M \begin{cases} x = \ln 3 \\ y = 1 + \ln 3 - \ln(3-1)^2 - \frac{6}{3} = -1 + \ln 3 - \ln 4 \end{cases}$$

$$y'' = D \left[1 - \frac{2e^x}{e^x-1} + 6e^{-x} \right] = -2 \frac{e^x(e^x-1) - e^{2x}}{(e^x-1)^2} - 6e^{-x} =$$

$$= -2 \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x-1)^2} - \frac{6}{e^x} = \frac{2e^{2x} - 6(e^x-1)^2}{e^x(e^x-1)^2}$$

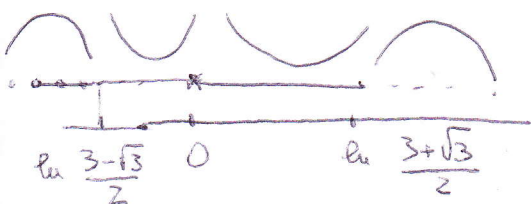
$$y'' > 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 6e^{2x} + 12e^x - 6 > 0 \Leftrightarrow -4e^{2x} + 12e^x - 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} - 6e^x + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{3}}{2} < e^x < \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$e^x \neq 1$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{3}}{2} < e^x < 1 \vee 1 < e^x < \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

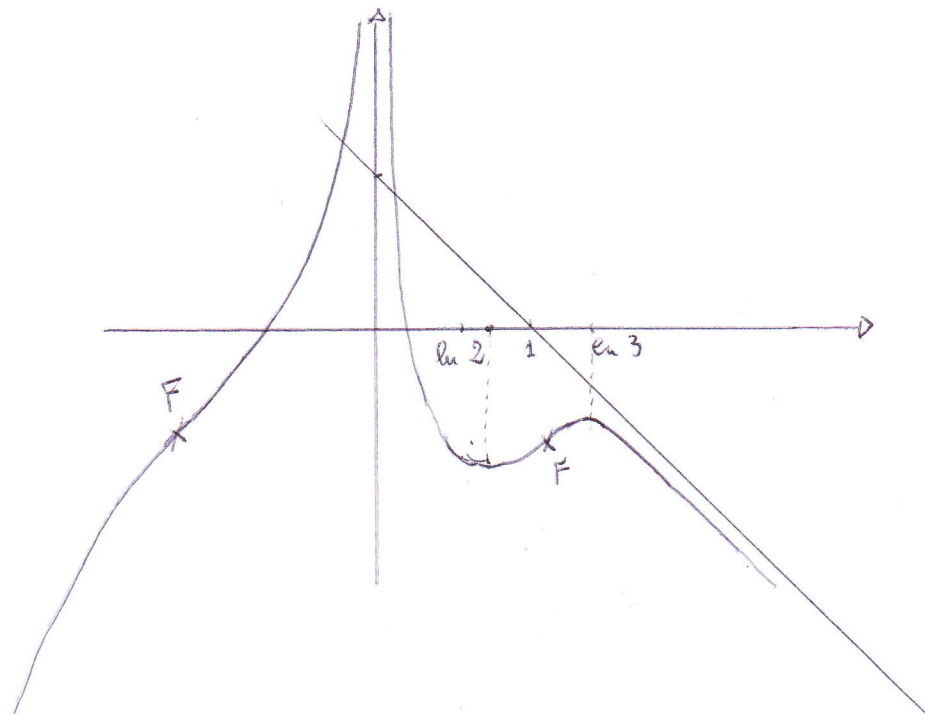
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) < x < 0 \vee 0 < x < \ln\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$



La funzione ha 2 flessi nei p.i.

di ascissa $\ln \frac{3-\sqrt{3}}{2} (< 0)$ e

$\ln \frac{3+\sqrt{3}}{2} (> 0)$



5. i) Posto $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$ e integrale diventa

$$\int \frac{t^3 + t}{(t-1)^4} dt = \int \left[\frac{A}{t-1} + \frac{d}{dt} \frac{Bt^2 + Ct + D}{(t-1)^3} \right] dt = \text{dopo aver fatto la derivata e usato il principio di identità dei polinomi, si trova}$$

$$= A \ln |t-1| + \frac{Bt^2 + Ct + D}{(t-1)^3} + \text{cost} = \ln |\ln x - 1| + \frac{-3\ln^2 x + 4\ln x - \frac{5}{3}}{(\ln x - 1)^3} + \text{cost.}$$

$A=1, B=-3, C=4, D=-\frac{5}{3}$

N.B. si poteva evitare di applicare le formule di Heaviside ponendo $\ln x - 1 = t \Rightarrow \ln x = 1 + t \quad \frac{1}{x} dx = dt$ l'integrale diventa

$$\int \frac{(1+t)^3 + t+1}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t^3} + \frac{2}{t^4} \right) dt = \ln |t| - \frac{3}{t} - \frac{2}{t^2} - \frac{2}{3t^3} + C$$

$$= \ln |\ln x - 1| - \frac{3}{\ln x - 1} - \frac{2}{(\ln x - 1)^2} - \frac{2}{3(\ln x - 1)^3} + C$$

ii) ID(g): $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases}$

ID =]0, e[$\cup$]e, + ∞)

g è contin. in]0, 1], in [1, e[e in]e, + ∞)

Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^3 x + \ln x}{x(\ln x - 1)^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} = -\infty \text{ con ord} < 1 \text{ ma } > 1 - \epsilon \forall \epsilon$$

Non posso applicare criterio dell'ordine, ma uso la def. di integrale improprio

Poiché $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln |\ln x - 1| - \frac{3}{\ln x - 1} - \frac{2}{(\ln x - 1)^2} - \frac{2}{3(\ln x - 1)^3} \right]_{\epsilon}^1 = G(1) - \infty = -\infty$

g non è integ. in $+\infty$ in]0, 1]. Non lo è neppure in [1, e) e in (e, + ∞) poiché

Chim $\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln^3 x + \ln x}{x(\ln x - 1)^4} = \frac{2}{e(0)^+} = +\infty$ con ord > 1 essendo $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e}$