

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

10 dicembre 2020

1. Risolvere la seguente equazione e disegnare poi le soluzioni nel piano complesso

$$|z|^6 + i(z^3 - \bar{z}^3) + 1 = 0.$$

2. Determinare gli asintoti di

$$f(x) = x^2 \sqrt[5]{x^5 - x^2} - x^3 + \arctan \frac{|e^x - 1|}{x}.$$

3. Dimostrare che l'asse delle x è tangente nel punto di ascissa $x_0 = \frac{\pi}{2}$ al grafico della funzione

$$y = \lg_{x-1}(\sin x).$$

4. Studiare la funzione

$$y = \sqrt{e^{|x^2-3|-1} - 1}$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare

$$\int x e^{5x^2} \sin 2x^2 dx.$$

6. Stabilire, giustificando la risposta, se la funzione

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$ e in $[3, +\infty[$.

Svolgimento

1. Posto $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ si ha $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

e quindi l'eq. diventa

$$\rho^6 + i \rho^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta - \cos(3\theta) - i \sin(3\theta)) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho^6 + i \rho^3 (\cancel{\cos 3\theta} + i \sin 3\theta - \cancel{\cos 3\theta} + i \sin 3\theta) + 1 = 0$$

$$\rho^6 + i^2 \rho^3 2 \sin 3\theta + 1 = 0 \quad \text{cioè} \quad \rho^6 - 2 \rho^3 \sin 3\theta + 1 = 0$$

Posto $\rho^3 = t$ l'eq. $t^2 - (2 \sin 3\theta)t + 1 = 0 (*)$ ha radici reali se e solo

$$\text{se } \frac{\Delta}{4} = \sin^2 3\theta - 1 \geq 0 \quad \text{cioè} \quad \sin^2 3\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 3\theta = \pm 1$$

Se $\sin 3\theta = 1$ l'eq. (*) diventa $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$ cioè

$$\rho^3 = 1 \Rightarrow \rho = 1 \quad \text{quindi per } \begin{cases} \sin 3\theta = 1 \\ \rho = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$$

si hanno 3 sol. $z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right) = -i$$

Se invece $\sin 3\theta = -1$ l'eq. (*) diventa $t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow$

$t = -1$ cioè $\rho = -1$ non accettabile perché $\rho \geq 0$!

Disegno le 3 sol. nel piano complesso:

L'equazione poteva essere risolta anche

nel seguente modo, ricordando che $+1 = -i^2$ e

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} :$$

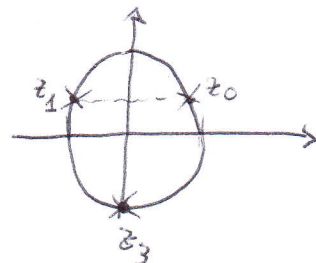
$$(z \cdot \bar{z})^2 + i z^3 - i \bar{z}^3 - i^2 = 0 \Rightarrow z^3 (\bar{z}^3 + i) - i (\bar{z}^3 + i) = 0 \Rightarrow$$

$$(z^3 - i)(\bar{z}^3 + i) = 0 \Rightarrow z^3 = i \vee \bar{z}^3 = -i \Rightarrow z = \sqrt[3]{i} \vee \bar{z} = \sqrt[3]{-i}$$

Perché $\sqrt[3]{i} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\}$

$$\sqrt[3]{-i} = \left\{ \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\} = \left\{ i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

si conclude che l'eq. ha 3 radici date da $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $-i$.



2. $ID = \mathbb{R}^*$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt[5]{x^5 - x^2} - x^3 + \operatorname{arctg} \frac{|e^x - 1|}{x} \quad \Delta \quad \text{perché } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt[5]{x^5 - x^2} - x^3 = 0,$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{|e^x - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 1}{x} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{|e^x - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \left(-\frac{e^x - 1}{x} \right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ e quindi

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{4} \quad \Delta \text{ asintoti verticali}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt[5]{x^5 - x^2} - x^3 + \operatorname{arctg} \frac{|e^x - 1|}{x} = -\frac{1}{5} + \frac{\pi}{2} \quad \text{perché}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt[5]{x^5 - x^2} - x^3}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot x \sqrt[5]{1 - \frac{1}{x^3}} - x^3 =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \frac{1}{x^3})^{\frac{1}{5}} - 1}{-\frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{5} \quad \text{mentre } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{|e^x - 1|}{x} = \frac{\pi}{2}$

Dunque $y = -\frac{1}{5} + \frac{\pi}{2}$ as. orizz. a $+\infty$.

Perché $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \sqrt[5]{x^5 - x^2} - x^3 + \operatorname{arctg} \frac{|e^x - 1|}{x} = -\frac{1}{5} + 0$

$y = -\frac{1}{5}$ as. orizz. a $-\infty$

3. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ eq. retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0

Nel nostro caso: $f(x_0) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} \left(\sin \frac{\pi}{2} \right) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\log_{x-1}(\sin x)} = \frac{\log \sin x}{\log(x-1)} = \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x \cdot \log(x-1) - \log \sin x}{\log^2(x-1)}$

quindi $f'(x_0) = \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - \frac{\log \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \right) \frac{1}{\log^2(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)} = 0$

Dunque la tangente a f_f nel pto di ascissa $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ha eq.

$y = 0$ asse delle ascisse.

$$3. \text{ ID: } e^{|x^2-3|-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{|x^2-3|-1} \geq 1 \Leftrightarrow |x^2-3|-1 \geq 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow |x^2-3| \geq 1 \Leftrightarrow x^2-3 \leq -1 \vee x^2-3 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \vee x^2-4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \vee x \leq -2 \vee x \geq 2$$

$$\text{Conclusion: ID} = (-\infty, -2] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [2, +\infty)$$

f è pari poiché il suo dominio è simmetrico risp. a $x=0$ e

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \text{ID}$$

Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{e^2-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ e^{|x^2-3|-1} = 1 \end{cases}$$

$$\text{cioè } y=0 \quad x = \pm \sqrt{2}, \pm 2$$

$$(\sqrt{e^2-1}, 0) \quad (-2, 0) \quad (-\sqrt{2}, 0) \quad (\sqrt{2}, 0) \quad (2, 0)$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^{|x^2-3|-1}} - 1 \quad \forall x \in \text{ID}$$

As. verticali

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty \quad \text{As. obliqua}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{per gli ordini}$$

As. obliqui

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{e^{|x^2-3|-1}}-1} \cdot e^{|x^2-3|-1} \cdot \frac{x^2-3}{|x^2-3|} \cdot 2x$$

$$\text{ID}(y') : \begin{cases} e^{|x^2-3|-1} - 1 > 0 \\ x^2-3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \vee -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \vee x > 2 \\ x \neq \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{ID}(y') = \text{ID}(y) - \{\pm 2, \pm \sqrt{2}\}$$

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow +\sqrt{2}} y' = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{e^{|x^2-3|-1}}{2\sqrt{e^{|x^2-3|-1}}-1} \cdot (-1) \cdot 2x = -\infty$$

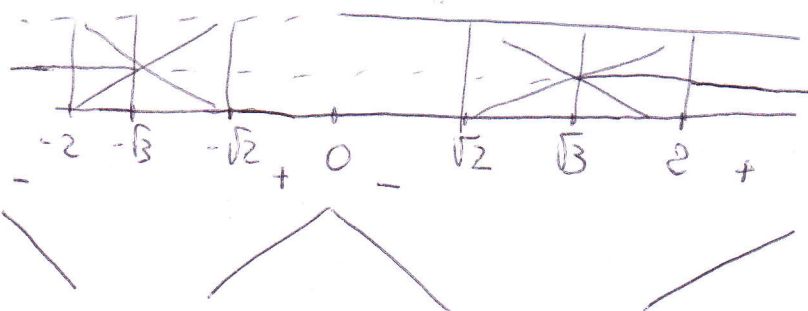
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y' = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{|x^2-3|-1}}{2\sqrt{e^{|x^2-3|-1}}-1} \cdot (+1) \cdot 2x = +\infty$$

$x = \sqrt{2}$ e $x = 2$
pti di semicuspide

$$y' > 0 \Leftrightarrow (x^2-3)x > 0$$

$$x > 0$$

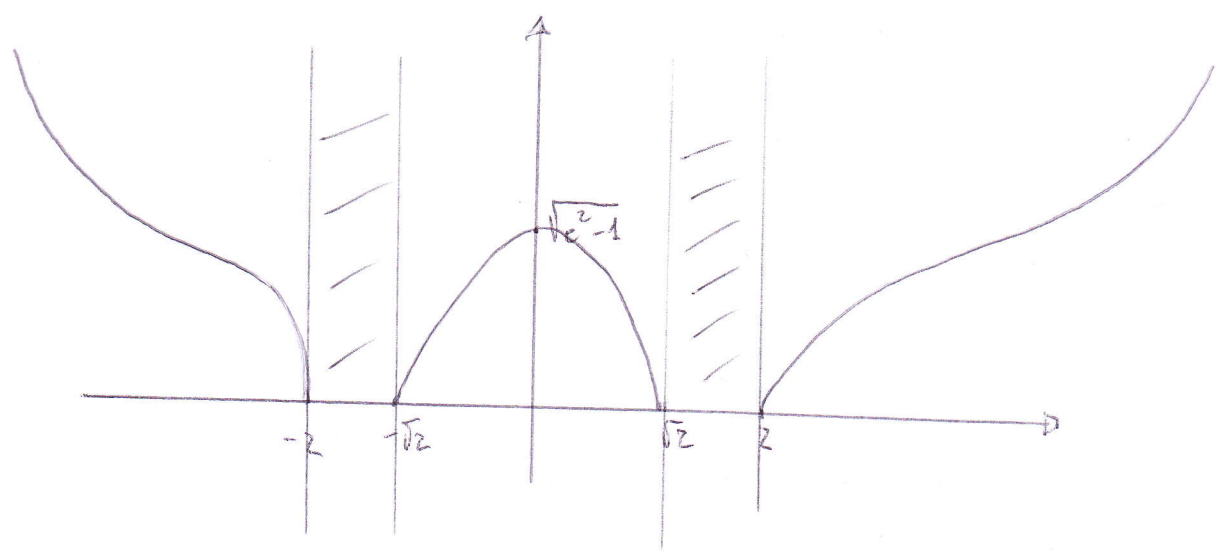
$$x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$$



$$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{e^2-1} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\cup \quad \begin{cases} x=\pm \sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$$

Non studio segno di y'' , ma osservo che y_f parte o arriva con y_f verticale nei pli di intersezione con asse x mentre per $x \rightarrow +\infty$ si comporta come $\sqrt{e^{x^2}} = e^x$ e dunque senza risolvere sono lì alto.



5. Posto $x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$ e integrale di parte

$$\int x e^{5x^2} \sin 2x^2 dx = \frac{1}{2} \int e^{5t} \sin 2t dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{e^{5t}}{5} \right) \sin 2t dx$$

P.P.

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} e^{5t} \sin 2t - \frac{1}{5} \int 2 e^{5t} \cos 2t dt \right] =$$

$$= \frac{1}{10} \left[e^{5t} \sin 2t - 2 \left(\frac{e^{5t}}{5} \cos 2t + 2 \int \frac{e^{5t}}{5} \sin 2t \right) \right] =$$

$$\Rightarrow \int e^{5t} \sin 2t dt = \frac{1}{5} e^{5t} \sin 2t - \frac{2}{25} e^{5t} \cos 2t + \frac{4}{25} \int e^{5t} \sin 2t dt$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{4}{25} \right) \int e^{5t} \sin 2t dt = e^{5t} \frac{5 \sin 2t - 2 \cos 2t}{25} + C$$

$$\Rightarrow \int e^{5t} \sin 2t dt = e^{5t} \frac{5 \sin 2t - 2 \cos 2t}{25} + C \Rightarrow I = e^{5x^2} \frac{5 \sin 2x^2 - 2 \cos 2x^2}{58} + C.$$

6. Poiché f è continua $\forall x \neq 0$, calcolo

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ può essere prodotto di funzione infinitesima per f limitata
 $\Rightarrow f$ prolung. a continuità anche per $x=0 \Rightarrow$
 f integ. in senso classico (e anche in s.i.) in $[0,1]$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^+ \\ y = \frac{1}{x}}} \frac{\sin y}{y} = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ non è integ. in s.i. in $[3, +\infty)$.