

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

14 ottobre 2020

1. Risolvere e disegnare nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione

$$iz^3 = \bar{z}.$$

2. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - \cos \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} \right)}{\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

3. Studiare la funzione

$$y = \frac{1}{\ln x} + \ln |\ln x|,$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

4. Data la funzione

$$f(x) = x \ln \left| \frac{x^2 + 4}{4 - x^2} \right|,$$

- i) studiare dominio e positività;
- ii) determinare l'insieme delle primitive;
- iii) stabilire se l'area del rettangoloide relativo a f di base $[3, +\infty[$ è finita o no.

Svolgimento

1. Moltiplicando per 2 ambo i membri dell'equazione, si ha

$$z^4 = |z|^2 \quad \text{da, posto } z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ diventa:}$$

$$i \rho^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \rho^2 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee i \rho^2 \cos 4\theta - \rho^2 \sin 4\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee \begin{cases} \rho^2 \cos 4\theta = 0 \\ -\rho^2 \sin 4\theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0 \vee \begin{cases} \cos 4\theta = 0 \\ \sin 4\theta = -1 \\ \rho = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 4\theta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z_k = \cos\left(\frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\right).$$

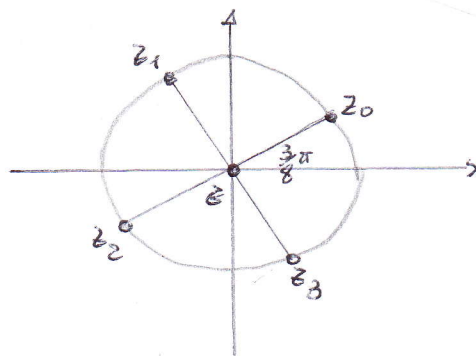
L'equazione ha 5 soluzioni;

$$z = 0, \quad z_0 = \cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{3}{8}\pi + \pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{8}\pi + \pi\right)$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi\right).$$



2. Posto $y = \frac{1}{x}$, il limite diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{y^2} - \cos y - \frac{3}{2}y^2}{y^2 \sin^2 y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + y^2 + \frac{y^4}{2} + o(y^4) - 1 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{4!}y^4 + o(y^5) - \frac{y^2}{2!}}{y^2 (y^2 - \frac{y^3}{3!})^2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{24})y^4 + o(y^4)}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{11}{24}y^4}{y^4} = \frac{11}{24}.$$

al denominatore hanno gli infinitesimi di ord superiore dovendo confrontare con il numeratore che e' infinitesimo di ordine 4

$$3. \text{ID: } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \\ |\ln x| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{ID} =]0, 1[\cup]1, +\infty)$$

Non intersezione con asse y poichè $0 \notin \text{ID}$

Non sappiamo studiare la inters. con asse y e possiamo

poiché non si sa risolvere l'eq. e la disuguaglianza

(2)

$$\frac{1}{\ln x} + \ln |\ln x| = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\ln x} + \ln |\ln x| > 0$$

(dedurremo poi questi elementi dal grafico della funzione)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} + \ln |\ln x| \right) = \frac{1}{-\infty} + \ln(+\infty) = 0 + \infty = +\infty \quad x=0 \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} + \ln |\ln x| = \frac{1}{0^-} + \ln 0 = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} + \ln |\ln x| = \frac{1}{0^+} + \ln 0 = +\infty - \infty = +\infty$$

$\Rightarrow x=1$ A.V.

per gli ordini poiché $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\ln y} = +\infty$ con ord 1
 mentre $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln |\ln x| = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$ con ordine lento
 $y = x-1$
 $y = |\ln x|$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} + \ln |\ln x| = 0 + \infty = +\infty \quad \nexists \text{ as. orizz.}$$

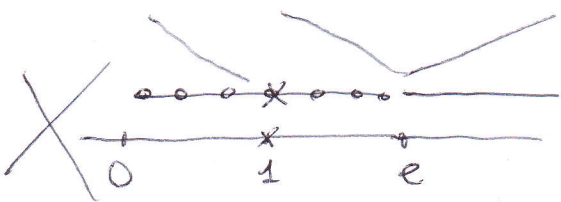
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} + \ln |\ln x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln x} + \frac{\ln |\ln x|}{x}}{x} = 0 \quad \nexists \text{ As. ob.}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 per gli ordini

$$y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} + \frac{1}{x \ln x} = \frac{\ln x - 1}{x \ln^2 x} \quad \forall x \in \text{ID}(y)$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x \ln^2 x} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

(il denomin. > 0
essendo $x > 0$)



f decresce in $]0, 1[$ e in $]1, e]$
 cresce in $[e, +\infty)$

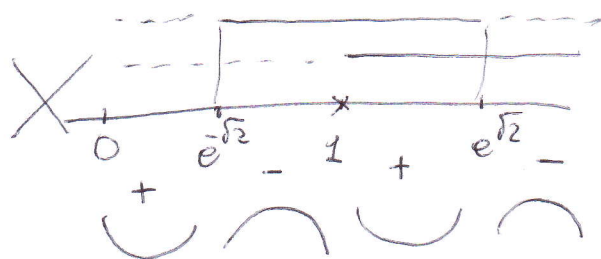
$$m \begin{cases} x = e \\ y = 1 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x \ln^2 x - (\ln x - 1)(\ln^2 x + 2 \ln x)}{x^2 \ln^4 x} = \frac{\ln^2 x - \ln^3 x - 2 \ln^2 x + \ln^2 x + 2 \ln x}{x^2 \ln^4 x}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow -\ln^3 x + 2\ln^2 x > 0 \Leftrightarrow \ln x (2 - \ln^2 x) > 0 \quad (3)$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$2 - \ln^2 x > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < \ln x < \sqrt{2} \Leftrightarrow e^{-\sqrt{2}} < x < e^{\sqrt{2}}$$



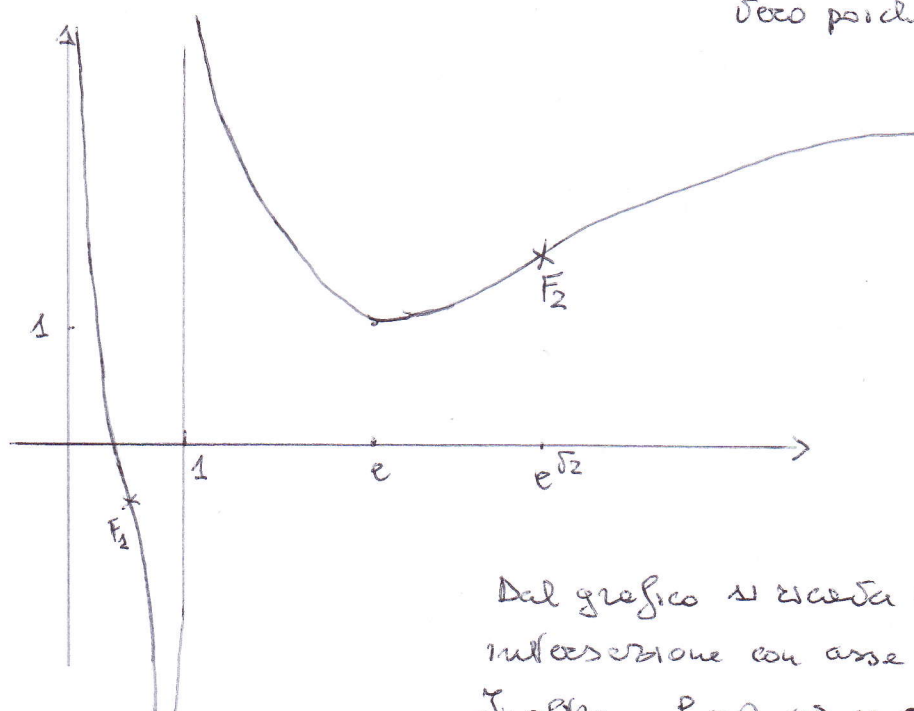
f convessa in $]0, e^{-\sqrt{2}}[$ e in $]1, e^{\sqrt{2}}[$

f concava in $]e^{-\sqrt{2}}, 1[$ e in $]e^{\sqrt{2}}, +\infty[$

$$F_1 \begin{cases} x = e^{-\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2}(x) \end{cases} \quad F_2 \begin{cases} x = e^{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2}(x) \end{cases}$$

N.B. $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2} < 0$ perché $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 < 0 \Leftrightarrow \ln 2 < \sqrt{2}$

vero perché $\ln 2 < \ln e = 1 < \sqrt{2}$



Dal grafico si evince che f ha una sola intersezione con asse x per $x = \alpha \in]0, e^{-\sqrt{2}}[$.
Inoltre $f > 0 \Leftrightarrow x \in]0, \alpha[\cup]1, +\infty[$.

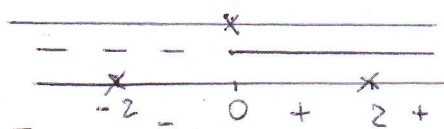
4.i) ID: $\left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{4-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow 4-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2 \quad \text{ID} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$f(x) > 0 \quad x > 0$

$$\lg \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{4-x^2} < -1 \vee \frac{x^2+4}{4-x^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4+4-x^2}{4-x^2} < 0 \vee \frac{x^2+4-4+x^2}{4-x^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 4-x^2 < 0 \vee \begin{cases} x \neq 0 \\ 4-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$$



$f(x) > 0$ per $x \in]0, 2[\cup]2, +\infty[$

(4)

ii) Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} \int x \ln \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| dx &= \frac{x^2}{2} \ln \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| - \int \frac{x^2}{2} \Delta \left(\ln \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{4-x^2}{x^2+4} \cdot \frac{2x(4-x^2)+2x(x^2+4)}{(4-x^2)^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| - \frac{1}{2} \int \frac{16x^3}{(4-x^2)(x^2+4)} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| + \frac{4}{2} \int \frac{4x^3}{x^4-16} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left| \frac{x^2+4}{4-x^2} \right| + 2 \ln |x^4-16| + C \end{aligned}$$

iii) Perché $\text{area}(R_{f, [3, +\infty)}) = \int_3^{+\infty} \cancel{f(x)} dx$ (significato geometrico integrale improprio)

bisogna stabilire se f è integrabile in s.i. in $[3, +\infty)$.

Ossendo che

- f e continua in $[3, +\infty)$ e positiva;

• Also $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left| \frac{x^2 + 4}{4 - x^2} \right| = +\infty \cdot 0$ f.e.

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x^2 + 4}{-4 + x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{8}{x^2 - 4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{8x}{x^2-4}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ con ordine 1}}} \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{8}{x^2-4})}{\frac{8}{x^2-4}}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ poiché } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1}} = 0 \quad \text{con ordine 1}$$

Per il criterio di integrabilità m.s.i. si conclude che f non è assolutamente integrabile e quindi non è integ. in $[3, +\infty)$ (essendo p.r.i.).