

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

17 settembre 2020

1. Risolvere e disegnare nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione

$$[\operatorname{Re}(i \bar{z}(z-2))]^2 - [\operatorname{Im}(z(\bar{z}-2i))]^2 = i^{2020} - \left(\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} \right)^{12}.$$

2. Studiare asintoti della funzione

$$y = \sqrt{x^2 + 4x - 2} + x$$

3. Studiare la funzione

$$y = \frac{x}{|\ln x|^3},$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

4. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 |\ln(2x-1)| - \ln(x+3)^2}{x}}$$

5. Data la funzione

$$\int \left(\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \sin^2 x \cos^2 x \right) dx,$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) calcolare, se hanno senso, gli integrali della funzione in $]0, 1]$ e in $\left[1, \frac{\pi}{2}\right[$.

Solcimento

1. Poiché, posto $z = a + ib$, si ha

$$[\operatorname{Re}(i\bar{z}(z-2i))]^2 = [\operatorname{Re}(i|z|^2 - 2i\bar{z})]^2 = [\operatorname{Re}(i(a^2+b^2) - 2ai + 2b)]^2 = 4b^2,$$

$$[\operatorname{Im}(z(\bar{z}-2i))]^2 = [\operatorname{Im}(|z|^2 - 2ia - 2i^2b)]^2 = [-2a]^2 = 4a^2$$

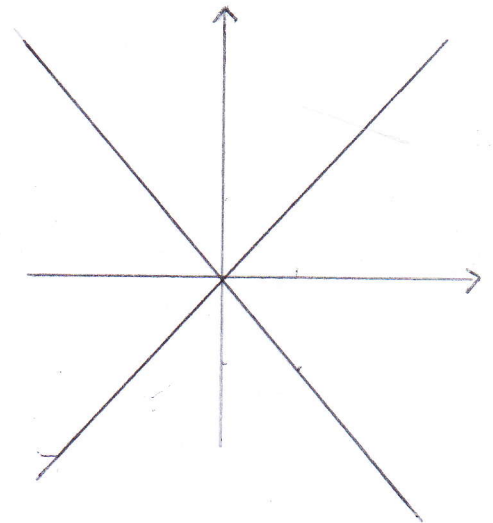
$$i^{2020} = (i^4)^{505} = 1^{505} = 1$$

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} \right)^{12} = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{12} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

l'equazione diventa

$$4b^2 - 4a^2 = 1 - 1 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b = \pm a$$

Le soluzioni dell'equazione sono tutti e solo i punti $z = a \pm ia$ che si trovano sulle bisettrici del I° e III° quadrante e del II° e IV° quadrante



2. ID: $x^2 + 4x - 2 \geq 0$ $x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{18}$

$$ID = (-\infty, -2 - \sqrt{18}] \cup [-2 + \sqrt{18}, +\infty)$$

Poiché i punti al finito che sono di accumulazione ma non appartengono al dominio, $\nexists$ asintoti verticali.

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x - 2} + x = (+\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 2})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x - 2} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 2}{\sqrt{x^2 + 4x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-x - x} = -2$$

trascuro infiniti
più tardi e uso

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ se } x < 0$$

$$y = -2$$

As. orizz. a $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x - 2} + x = +\infty$$

$\nexists$ as. orizz. a $+\infty$

Però asintoti obliqui a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 2} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x}{x} = 2 \quad (\text{essenziale coeff. angolare as. ob.})$$

trascurvo infiniti più lent,
e uso $\sqrt{x^2} = |x| = x \quad \text{se } x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x - 2} + x - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x - 2} - x = (+\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x + x} = 2 \quad (\text{Termine nullo})$$

$$y = 2x + 2 \quad \text{as. obliqua a } +\infty$$

$$3. \text{ ID: } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 & x \neq 1 \end{cases} \quad \text{ID} =]0, 1[\cup]1, +\infty)$$

$$\nexists \text{ intersezione con gli assi. } y > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad (\text{per } \forall x \in \text{I.D.})$$

$x \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|\ln x|^3} = \frac{0}{+\infty} = 0 \quad \nexists \text{ as. verticale in } 0, \text{ f. prob. per continuità}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{|\ln x|^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad x = 1 \quad \text{As. vert. completo}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|\ln x|^3} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \quad (\text{per gli ordini}) \quad \nexists \text{ As. obliqua a } +\infty$$

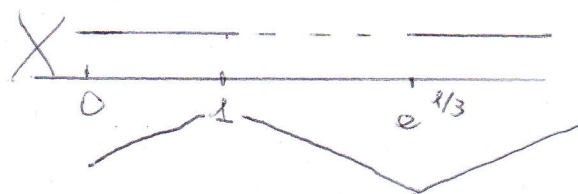
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|\ln x|^3} \cdot \frac{1}{x} = 0 \quad \nexists \text{ as. obliqua a } +\infty$$

$$y' = \frac{|\ln x|^3 - 3|\ln x| \cdot \frac{\ln x}{|\ln x|} \cdot \frac{1}{x}}{|\ln x|^6} = \frac{|\ln x| (|\ln x|^2 - 3 \ln x)}{|\ln x|^6}$$

$$= \frac{\ln^2 x - 3 \ln x}{|\ln x|^5} \quad \forall x \in \text{ID}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 3 \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \vee \ln x > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > e^{1/3}$$



f crescente in $]0, 1[$ e in $]e^{1/3}, +\infty)$

decrescente in $[1, e^{1/3}]$

$$M \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad m \begin{cases} x=e^{1/3} \\ y=\frac{e^{1/3}}{(\frac{1}{3})^3} = 27\sqrt[3]{e} \end{cases}$$

$$y'' = D \frac{\ln x (\ln x - 3)}{|\ln x|^5} = \begin{cases} D \frac{\ln x - 3}{\ln^4 x} \\ D \left(-\frac{\ln x - 3}{\ln^4 x} \right) \end{cases}$$

se $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

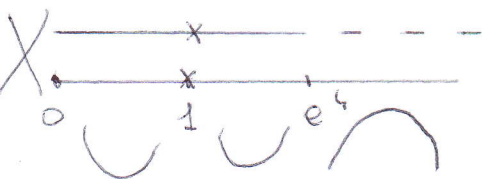
se $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^4 x - (\ln x - 3) 4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^8 x} = \frac{\cancel{\ln^3 x} (\ln x - 4 \ln x + 12)}{x \ln^8 x} = \frac{3(4 - \ln x)}{x \ln^5 x} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{3(4 - \ln x)}{\ln^5 x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{4 - \ln x}{\ln^5 x} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -\frac{4 - \ln x}{\ln^5 x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 4 - \ln x > 0 \end{cases}$$

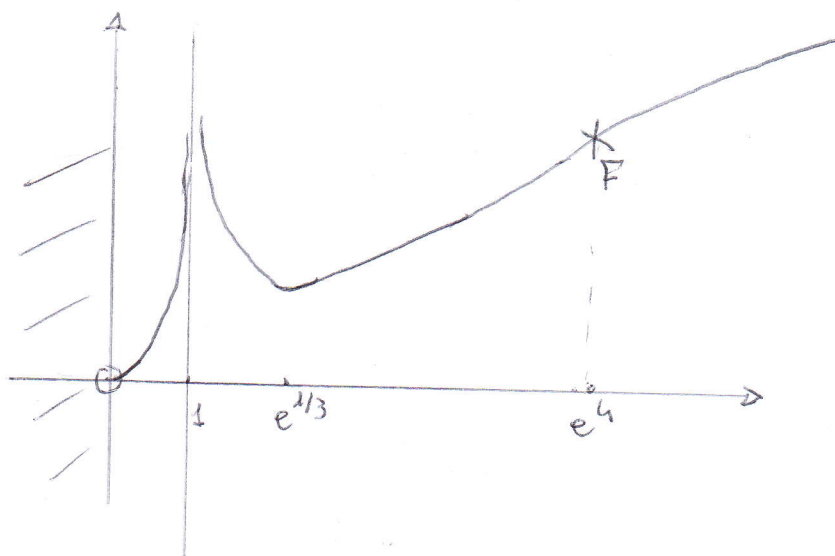
poiché $\ln^5 x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$\begin{cases} x > 1 \\ 4 - \ln x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 4 - \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \ln x < 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{I} \cap \\ x < e^4 \end{matrix}$$



f convessa in $]0, 1[$ e in $]1, e^4[$
concava in $[e^4, +\infty)$

$$F \begin{cases} x = e^4 \\ y = \frac{e^4}{4^3} \end{cases}$$



Per capire la pendenza con cui tende a 0 il grafico, calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 0} y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - 3}{\ln^4 x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

Dunque f si avvicina all'origine con tangente ~~verticale~~ orizzontale.

4. $\frac{2|\ln(2x-1)| - \ln(x+3)^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ (x+3)^2 > 0 \\ \frac{2|\ln(2x-1)| - \ln(x+3)^2}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq -3 \\ 2|\ln(2x-1)| - 2\ln|x+3| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ |\ln(2x-1)| - \ln(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
(tolgo denominatore perché $x > \frac{1}{2} > 0$) ↑
tolgo 1 perché $x > \frac{1}{2} > -3$

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \ln(2x-1) \geq 0 \\ \ln(2x-1) \geq \ln(x+3) \end{cases} \vee \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \ln(2x-1) < 0 \\ -\ln(2x-1) - \ln(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x-1 \geq 1 \\ 2x-1 \geq x+3 \end{cases} \vee \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x-1 < 1 \\ \ln((2x-1)(x+3)) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \\ x \geq 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 1 \\ 2x^2 + 5x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4 \vee x \in [\frac{1}{2}, \frac{-5+\sqrt{57}}{4}]$
 $-\frac{5-\sqrt{57}}{4} \leq x \leq \frac{-5+\sqrt{57}}{4}$
 $ID = [4, +\infty) \cup]-\frac{1}{2}, \frac{-5+\sqrt{57}}{4}]$

5. i) $\int (\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \sin^2 x \cos^2 x) dx = \int (\frac{\sec^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{1}{4} \sin^2 2x) dx$
 $= \lg x - \operatorname{colog} x + \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \lg x - \operatorname{colog} x + \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c.$

ii) Poiché la funzione integranda è definita e continua se $\sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$, p.e. cont. in $]0, 1]$ e in $[1, \frac{\pi}{2}[$.

Insomma $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = +\infty$ con ord $2 > 1$ (essendo $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$)

e $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = +\infty$ con ord $2 > 1$ ($\cos x \sim -(x - \frac{\pi}{2})$) e non int. in s.i in $[0, 1]$ e $[1, \frac{\pi}{2}[$ e gli integrali $= +\infty$