

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

31 gennaio 2020

1. Risolvere e disegnare nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione

$$z^4 + (3 - 2i)z^2 + 6 \left(\frac{\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi}{\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi} \right)^{78} = 0.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(e^{\sqrt{1-x}} - 1) \ln(2-x)}{(1-x)^2}.$$

3. Determinare gli asintoti della seguente funzione

$$f(x) = x \arctan g \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

4. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\left| \frac{2x-1}{x+3} \right|}$$

- a) determinare crescita, decrescenza, massimi e minimi di f e studiare la natura di eventuali punti di non derivabilità;
- b) determinare eventuali altri elementi utili allo studio di funzione e abbozzare il grafico di f .

5. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{2|\ln(2x-1)| + \ln(x+3)^2}{e^{x^2-1} - 1}}$$

6. Data la funzione

$$\int \arctan \sqrt{x^2 - 2} dx,$$

- i) calcolare l'integrale indefinito;
- ii) calcolare, se hanno senso, gli integrali della funzione in $[0, 1]$ e in $[\sqrt{2}, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi}{\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi} \right)^{78} &= \cos 78 \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) \pi + i \sin 78 \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) \pi = \\ &= \cos 78 \cdot \frac{7}{12} \pi + i \sin 78 \cdot \frac{7}{12} \pi = \cos \frac{91}{2} \pi + i \sin \frac{91}{2} \pi = \\ &= \cos \left(45\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(45\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(44\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(44\pi + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -i \end{aligned}$$

l'equazione diventa

$$z^4 + (3-2i)z^2 - 6i = 0 \quad \text{Ponendo } z^2 = t$$

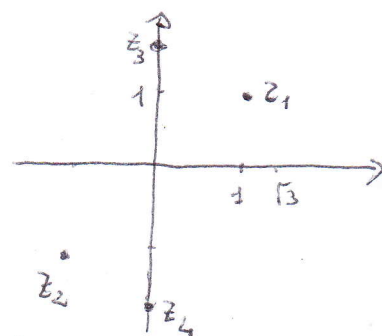
$$t^2 + (3-2i)t - 6i = 0 \quad \Delta = (3-2i)^2 + 24i = 9 + 4i^2 - 12i + 24i = (3+2i)^2$$

$$t_{1/2} = \frac{-3+2i \pm \sqrt{(3+2i)^2}}{2} = \frac{-3+2i \pm (3+2i)}{2} = \begin{matrix} 2i \\ -3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} z^2 = 2i &\Rightarrow z = \sqrt{2i} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} \right) \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right\} = \left\{ \pm \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \quad k \in \{0, 1\} \\ &\Rightarrow z_{1/2} = \pm (1+i) \end{aligned}$$

$$z^2 = -3 \Rightarrow z = \sqrt{-3} = \sqrt{3}i = \pm i\sqrt{3}$$

L'equazione ha 4 radici complesse $\pm(1+i), \pm i\sqrt{3}$



$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(e^{\sqrt{1-x}} - 1) \ln(2-x)}{(1-x)^2} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\sqrt{y}} - 1) \ln(1+y)}{y^2} \quad (-x+1=y) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{y} \cdot y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{y}} = +\infty. \end{aligned} \quad \left(\begin{matrix} e^{\sqrt{y}} - 1 \sim \sqrt{y} \\ \ln(1+y) \sim y \end{matrix} \right)$$

3. ID $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ID = $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \arccos y \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 0 \quad \text{perché prodotto di funzione infinitesima per funzione limitata (} 0 < \arccos y < \pi \forall x \in \mathbb{R} \text{)}$$

Dunque la funzione non ha asintoti verticali ma è prolungabile per continuità in $x=0$ (2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arccotg} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = +\infty \cdot \operatorname{arccotg} 1 = +\infty \cdot \frac{\pi}{4} = +\infty \quad \text{As. obliquo a } +\infty$$

(trascurando le costanti rispetto agli infiniti)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \operatorname{arccotg} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\infty \cdot \operatorname{arccotg}(-1) = -\infty \left(+\frac{\pi}{4}\right) = -\infty \quad \text{As. ob. a } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{eventuale coeff. ang. di as. obliquo a } +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{\pi}{4} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\operatorname{arccotg} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{\pi}{4} \right) = \infty \cdot 0 =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1 + \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^2} \cdot \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x - 1)^2 + (e^x + 1)^2} \cdot \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2} \cdot (-x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = 0 \quad \text{per gli ord.}$$

$+\infty$ con ord 2 $\hookrightarrow 0$ con ord esp.

$$y = \frac{\pi}{4} x \quad \text{As. ob. a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \operatorname{arccotg}(-1) = +\frac{\pi}{4} \quad (\text{eventuale coeff. ang. di as. ob. a } -\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \frac{\pi}{4} x = \infty \cdot 0 \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \infty \cdot 0 = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

$+\infty$ con ord 2 $\rightarrow 0$ con ord esp.

$$y = -\frac{\pi}{4} x \quad \text{as. ob. a } -\infty$$

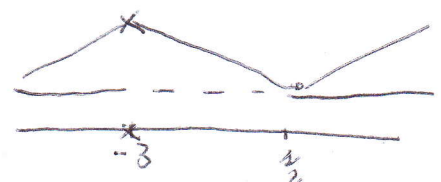
4. ID $x+3 \neq 0 \quad x \neq -3 \quad \mathbb{R} - \{-3\}$

a)

$$y' = \frac{1}{2 \sqrt{\left| \frac{2x-1}{x+3} \right|}} \cdot \frac{\frac{2x-1}{x+3}}{\left| \frac{2x-1}{x+3} \right|} \cdot \frac{2(x+3) - (2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{1}{2 \sqrt{\left| \frac{2x-1}{x+3} \right|}} \cdot \frac{2x-1}{\left| \frac{2x-1}{x+3} \right|} \cdot \frac{7}{(x+3)^2}$$

$$\text{ID}(y'): \frac{2x-1}{x+3} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \wedge x \neq -3$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > \frac{1}{2}$$



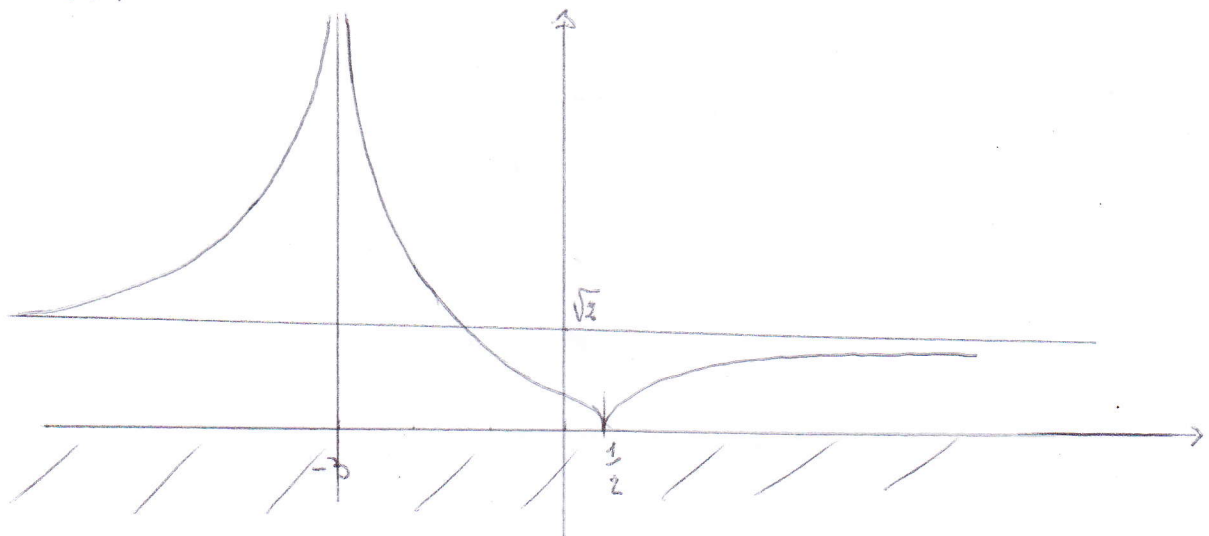
m $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ minimo relativo e assoluto $\neq$ massimo relativo e assoluto (3)

Poiché $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} y' = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} -\frac{1}{2\sqrt{-\frac{2x-1}{x+3}}} \cdot \frac{7}{(x+3)^2} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} y' = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}} \cdot \frac{7}{(x+3)^2} = +\infty$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ pto cuspidale

b) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \neq -3$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ $(\frac{1}{2}, 0)$ $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$
 intersezione con assi

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\left|\frac{2x-1}{x+3}\right|} = \sqrt{2}$ $y = \sqrt{2}$ as. orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\left|\frac{2x-1}{x+3}\right|} = +\infty$ $x = -3$ as. verticale completo



N.B. Dal contesto si deduce, senza studiare il segno di y'' , che la funzione ha un flesso di ascisse comprese tra -3 e $\frac{1}{2}$.

5. $\begin{cases} \frac{2|\ln(2x-1)| + \ln(x+3)^2}{e^{x^2-1}} \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$ Va applicata la regola del segno per $x > \frac{1}{2}$.

$N \geq 0$ $\cancel{2}|\ln(2x-1)| + \cancel{2}\ln(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow$ posso togliere il 2° valore assoluto poiché per $x > \frac{1}{2}$ vale $x+3 > 0$
 $|\ln(2x-1)| + \ln(x+3) \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(2x-1) \geq 0 \\ \ln(2x-1) + \ln(x+3) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \ln(2x-1) < 0 \\ -\ln(2x-1) + \ln(x+3) \geq 0 \end{cases}$

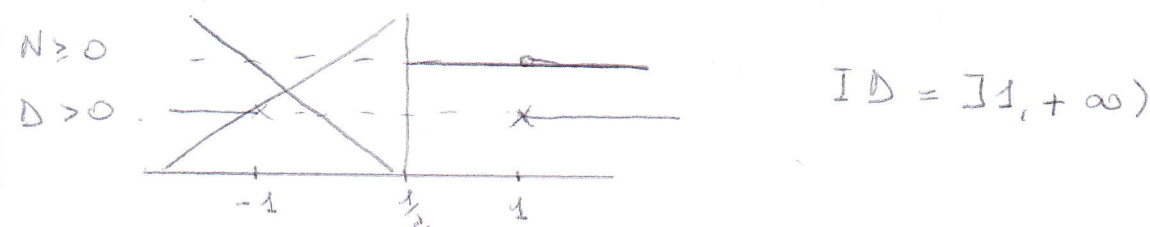
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 1 \\ \ln[(2x-3)(x+3)] \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < 2x-3 < 1 \\ \ln \frac{x+3}{2x-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 + 5x - 3 \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ \frac{x+3}{2x-1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq \frac{-5+\sqrt{57}}{4} \vee x \geq \frac{-5+\sqrt{57}}{4} \end{cases} \vee$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ \frac{x+3-2x+1}{2x-1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

Dunque $N \geq 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow e^{x^2-1} > e^0 \Leftrightarrow x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$



N.B. In realtà si vede subito che $N \geq 0 \quad \forall x > \frac{1}{2}$ perché
somma di un valore assoluto ($\geq 0 \quad \forall x > \frac{1}{2}$) e di $\ln(x+3) > 0$
essendo $\ln(x+3) > \ln(\frac{1}{2}+3) > 0 \quad \forall x > \frac{1}{2}$.

5. i) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-2} dx = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-2} - \int x \cdot \frac{1}{x^2-2+1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}} dx$
p.p.

dove

$$\int \frac{x^2}{x^2-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx$$

$$\sqrt{x^2-2} = t+x \Rightarrow x^2-2 = t^2+x^2+2tx$$

$$x = -\frac{t^2+2}{2t} \quad dx = -\frac{1}{2} \frac{t^2-2}{t^2} dt$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\left(-\frac{t^2+2}{2t}\right)^2-1}\right) \frac{1}{-\frac{t^2+2}{2t}+t} \left(-\frac{t^2-2}{2t^2}\right) dt = \int -\frac{t^4+4+4t^2}{t^4+4} dt = -\int \frac{1}{t} dt - \int \frac{4t^2}{t^4+4} dt$$

$$= -\lg|t| - \int \frac{4t}{t^4+4} dt, \quad \text{essendo}$$

$$\frac{4t}{t^4+4} = \frac{4t}{(t^2-2t+2)(t^2+2t+2)} = \frac{Bt+C}{t^2-2t+2} + \frac{Dt+E}{t^2+2t+2} =$$

$$= \frac{(Bt+C)(t^2+2t+2) + (Dt+E)(t^2-2t+2)}{t^4+4}$$

(5)

Applicando il principio di identità dei polinomi si trova che

$$\begin{cases} B = D = 0 \\ C = 2 \\ E = -2 \end{cases} \quad \text{e quindi}$$

$$\int \frac{4t}{t^4+4} dt = \int \frac{2}{t^2-2t+2} dt + \int \frac{-2}{t^2+2t+2} dt =$$

$$= \int \frac{2}{(t-1)^2+1} dt - 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = 2 \operatorname{arctg}(t-1) - 2 \operatorname{arctg}(t+1) + c$$

Conclusioni:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-2} dx &= x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-2} + \lg |\sqrt{x^2-2} - x| + \\ &2 \operatorname{arctg} (\sqrt{x^2-2} - x - 1) - 2 \operatorname{arctg} (\sqrt{x^2-2} - x + 1) + c \end{aligned}$$

ii) Poiché $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-2}$ è definita per $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$, non ha senso calcolarla e integrarla in $[0,1]$ poiché non è definita in questo intervallo.

Essendo invece la funzione ben definita e continua in $[\sqrt{2}, +\infty)$

ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-2} = \frac{\pi}{2} \neq 0$, si ha che la funzione non

è integrabile in senso improprio in $[\sqrt{2}, +\infty)$ ma, essendo $f > 0$,

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-2} dx = +\infty.$$