

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

15 ottobre 2018

1. Risolvere e disegnare nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione

$$|z| z^3 + z^3 - 8 |z| i - 8i = 0.$$

2. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^{1-\cos \sqrt{x}} + x^2 - 1}{x^\alpha}.$$

3. Dimostrare che il grafico della funzione

$$f(x) = x^{x \ln x}$$

ha retta tangente orizzontale nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

4. Studiare la funzione

$$y = \left| \ln \frac{x+1}{x} \right| + x + 4$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{e^{\tan x} + e^{2 \tan x}}{(2 + e^{\tan x})(1 + \cos 2x)}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire, dopo averne determinato il dominio, se è integrabile in $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ e in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Svolgimento

$$1. \quad z^3(|z|+1) - 8i(|z|+1) = 0 \quad \Leftrightarrow (z^3 - 8i)(|z|+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z^3 - 8i = 0 \quad \vee \quad |z|+1 = 0 \quad \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}$$

non ha sol. in $\mathbb{C}$
poiché $|z| \geq 0 \quad \forall z$

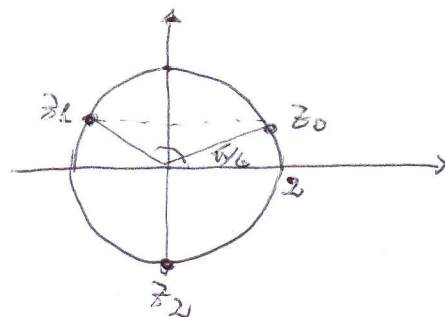
$$\Leftrightarrow z \in \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

L'equazione ha 3 soluzioni

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i$$



Le soluzioni sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^{1-\cos \sqrt{x}} + x^2 - 1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln 4)x + \cancel{x^2}^{\text{trascurio inferiore ed sup.}}}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ \ln 4 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

poiché $4^{1-\cos \sqrt{x}} - 1 \sim \ln 4 (1 - \cos \sqrt{x}) \sim 2 \ln 4 \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{x})^2 = (\ln 4)x$

essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^x - 1}{x} = \ln 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. Poiché la retta tangente al grafico di una funzione ha coefficiente angolare $= f'(x_0)$, basta provare che $f'(1) = 0$.

In fatti

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \Delta e^{\ln(x^{x \ln x})} = \Delta(e^{x \ln^2 x}) = e^{x \ln^2 x} (\ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}) \\ &= x^{x \ln x} (\ln^2 x + 2 \ln x) \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

e quindi $f'(1) = 1^0 (0 + 0) = 0$

4. ID: $\frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0$

$$ID = (-\infty, -1[\cup]0, +\infty)$$

A intersezione con asse x poiché $0 \notin ID$

Non sappiamo per ora studiare positività e intersezione con asse x , che dedurremo a posteriori dal grafico.

Asintoti: verticali, orizzontali, obliqui

lim $x \rightarrow -1^-$ $\left| \ln \frac{x+1}{x} \right| + x + 4 = \lim_{y \rightarrow 0^+} |\ln y| = +\infty$ $x = -1$ A.V.

lim $x \rightarrow 0^+$ $\left| \ln \frac{x+1}{x} \right| + x + 4 = \lim_{y \rightarrow +\infty} |\ln y| + 4 = +\infty$ $x = 0$ A.V.

lim $x \rightarrow +\infty$ $\left| \ln \frac{x+1}{x} \right| + x + 4 = \pm \infty$ Δ As. obliq.

lim $x \rightarrow \pm \infty$ $\frac{\left| \ln \frac{x+1}{x} \right| + x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^1}{x} = 1$ (m)

lim $x \rightarrow \pm \infty$ $\left| \ln \frac{x+1}{x} \right| + x + 4 - x = 4$ (q) $y = x + 4$
As. obliquo a $\pm \infty$

Studio della derivata I°

$$y' = \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\left| \ln \frac{x+1}{x} \right|} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-1}{x^2} + 1$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{x^2+x} + 1 = \frac{x^2+x-1}{x^2+x} \\ +\frac{1}{x^2+x} + 1 = \frac{x^2+x+1}{x^2+x} \end{cases}$$

se $\ln \frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$

se $\ln \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$

Poiché $ID(y') = ID(y)$ ~~A~~ pt. angolari o cuspidali (3)

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^2+x-1}{x^2+x} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ \frac{x^2+x+1}{x^2+x} > 0 \end{cases}$$

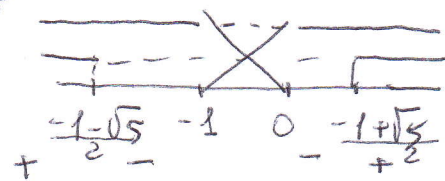
Poiché $x^2+x-1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$x^2+x > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0$

il 1° sistema diventa

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee \cancel{x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

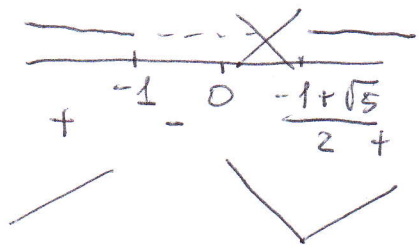
che è verificato per $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$



Poiché $x^2+x+1 > 0 \forall x$ il 2° sistema diventa

$$\begin{cases} x < -1 \\ x < -1 \vee x > 0 \end{cases} \text{ cioè } x < -1$$

Dunque $y' > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$



e la funzione cresce strettamente in

$$(-\infty, -1[\text{ e in }]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$$

decrece st. in $]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$ e ha un minimo in $\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \end{cases}$

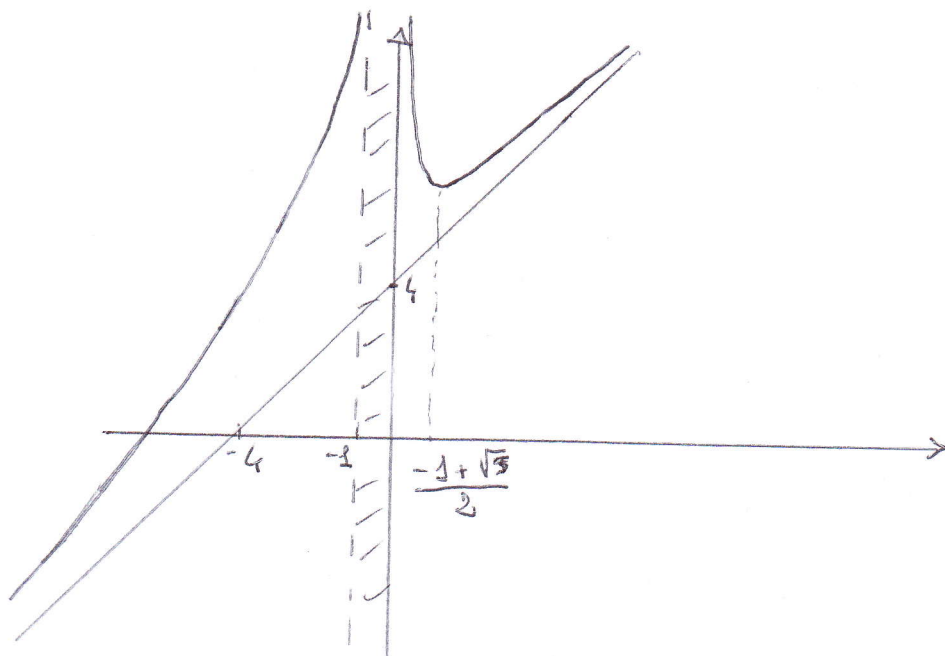
Studio della derivata II°

$$y'' = \begin{cases} D(-\frac{1}{x^2+x} + 1) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2} & \text{se } x > 0 \\ D(\frac{1}{x^2+x} + 1) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Quindi

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ -(2x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \vee x < -1$$

e la funzione è convessa in $(-\infty, -1[$ e in $]0, +\infty)$.



Dal grafico si deduce a posteriori che c'è una intersezione $x < -4$ con l'asse x e che la funzione è negativa per $x < \alpha$ e positiva per $-\alpha < x < -1$ $\vee$ $x > 0$.

5.i) Posto $e^{tg x} = t \Rightarrow tg x = \ln t \Rightarrow x = \arctg \ln t$

l'integrale diventa

$$dx = \frac{1}{1 + \ln^2 t} \cdot \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{e^{tg x} + e^{2tg x}}{(2 + e^{tg x})^2} \cdot \frac{2}{1 + \ln^2 x} dx$$

(si noti che $1 + \cos 2x = 1 + \frac{1 - \ln^2 x}{1 + \ln^2 x}$)

$$= \int \frac{t + t^2}{(2 + t)^2} \cdot (1 + \ln^2 t) \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 t} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1 + t}{2 + t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{2 + t}\right) dt = \frac{1}{2} (t - \ln|2 + t|) + C = \frac{1}{2} (e^{tg x} - \ln(2 + e^{tg x})) + C.$$

ii) Poiché la funzione integranda è definita e continua $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, essa è integrabile in senso classico in $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \subset \mathbb{I}D$. Per vedere se è integ. in s.i. in $[0, \frac{\pi}{2}]$ osservo che

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{tg x} + e^{2tg x}}{2 + e^{tg x}} \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 x} = \lim_{\substack{tg x = y \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{e^y + e^{2y}}{2 + e^y} \cdot \frac{1 + y^2}{2} = +\infty \text{ con}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $+\infty$ esponenziale $+\infty$ ord 2

ordine comunque grande e quindi non è integ. in s.i. in $[0, \frac{\pi}{4}]$.