

# Corso di laurea in Chimica

## Esame di

### ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

18 settembre 2018

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$|z| = z^2 + 3 \operatorname{Re}(z) + 2.$$

2. Studiare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2}}{4^x + 3 \cdot 2^{x-1} - 1}}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 \cos \frac{5}{x} - x(x-1)e^{\frac{1}{x}} \right).$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\sin 2x + \cos^3 x}{\sin^3 x + 1},$$

i) calcolare l'insieme delle primitive,

ii) dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso classico o in senso improprio in  $[0, 3]$  e in  $]\frac{3}{2}\pi, 3\pi]$ .

# Soligimento

1. Posto  $z = a+ib$  in  $Ra$

$$\sqrt{a^2+b^2} = a^2-b^2+2abi+3a+2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = a^2-b^2+3a+2 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=0 \\ \sqrt{b^2} = -b^2+2 \end{cases} \vee \begin{cases} b=0 \\ \sqrt{a^2} = a^2+3a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b^2+|b|-2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} b=0 \\ a^2-|a|+3a+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=0 \quad |b|_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 & \text{Non acc} \\ 1 & \end{cases} \vee \begin{cases} b=0 \\ a^2+2a+2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} b=0 \\ a^2+4a+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \pm \sqrt{2} \\ b=0 \end{cases} \quad \Delta < 0 \quad \phi \quad a_{1/2} = -2 \pm \sqrt{2} \quad (\text{entrambi accettabili perché } < 0)$$

Conclusione: l'equazione ha 4 sol.  $z = \pm i, z = -2 \pm \sqrt{2}$ .

$$2. \begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2}}{4^x+3 \cdot 2^{x-1}-1} \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

Applico regola del segno nell'insieme  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$N \geq 0 \quad x\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ x^4-x^2-2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Posto } x^2 = y$$

$$y^2-y-2 \geq 0 \quad y_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \quad x^2 \leq -1 \vee x^2 \geq 2$$

$$\text{Da cui } N \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$$

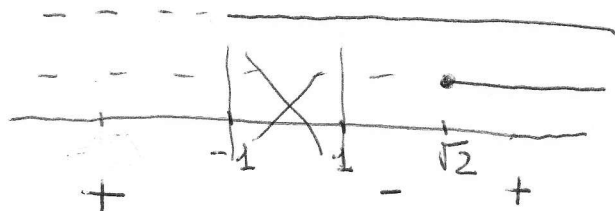
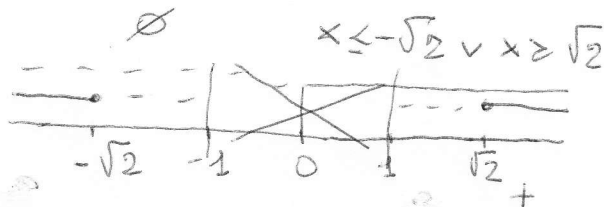
$$D > 0 \quad 4^x + 3 \cdot 2^{x-1} - 1 > 0$$

$$2^{2x} + \frac{3}{2} \cdot 2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 2 > 0$$

$$2^x = y \quad 2y^2 + 3y - 2 > 0 \Leftrightarrow y_{1/2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2^x < -2 \vee 2^x > 2^{-1} \quad \phi \quad x > -1$$

$$ID = (-\infty, -1] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$



3. ID:  $\begin{cases} x^4 - 5x^2 + 6 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad x^2 = y \quad y^2 - 5y + 6 \geq 0$

$y_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \quad x^2 \leq 2 \vee x^2 \geq 3$

ID =  $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{2}, 0] \cup [0, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

$f(x) = f(-x)$  f. par. Studio f. per  $x > 0$  e poi si basterà lo studio di  $f$  rispetto all'asse  $y$  di intersezione con l'asse  $x$

$\begin{cases} y = 0 \\ x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\pm\sqrt{2}, 0) \quad (\pm\sqrt{3}, 0)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}}{|x|} = +\infty \quad x = 0 \quad \text{As. Vert.}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty \quad \text{As. Obliq.}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^4}} = 1 \quad (\text{eventuale scappatoia da as. obliquo})$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\frac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^4}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 6 - x^4}{\left( \sqrt{\frac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^4}} + x \right) x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 6}{2x^3} = 0 \quad (9)$

$y = x \quad \text{As. ob. a } +\infty$

$y = -x \quad \text{As. ob. a } -\infty$

Studio  $y'$  per  $x > 0$ :

$y' = \frac{4x^3 - 10x}{2\sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}} \cdot x - \sqrt{x^4 - 5x^2 + 6} = \frac{(2x^3 - 5x)x - x^4 + 5x^2 - 6}{x^2 \sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}} =$

$= \frac{x^4 - 6}{2x^2 \sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}}$

ID( $y'$ ) = ID( $y$ ) -  $\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} y' = \frac{4-6}{0^+} = -\infty$

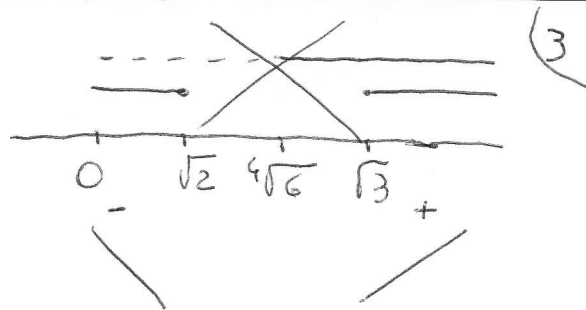
$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} y' = \frac{9-6}{0^+} = +\infty$

$x = \sqrt{2}, \quad x = \sqrt{3}$

pt. a tangente verticale

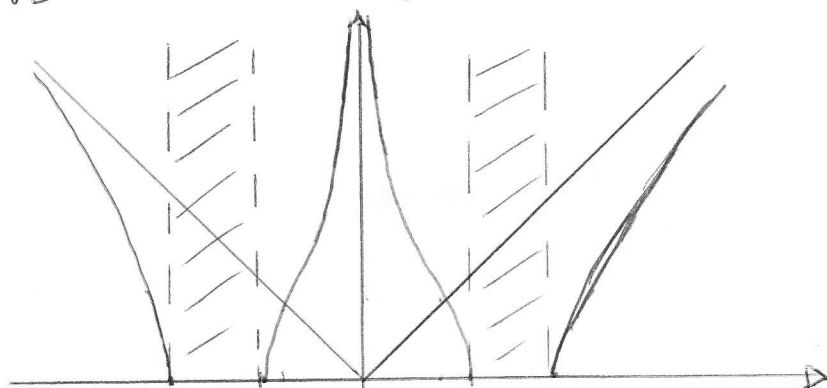
$$\begin{cases} y' > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 6 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt[4]{6}$$



$f$  decresce in  $]0, \sqrt{2}]$   
 cresce in  $[\sqrt{3}, +\infty)$

Non studio  $y''$  (troppo lungo) ma deduco dagli asintoti  
 e dal  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} y'$  che la funzione ha un flesso in  $]0, \sqrt{2}[$ .



$$4^o \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 (\cos \frac{5}{x} - x(1-x)e^{\frac{1}{x}})}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos 5y - (1-y)e^y}{y^2} =$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{25}{2}y^2 + o(y^2) - (1-y)(1+y+\frac{y^2}{2} + o(y^2))}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{25}{2} + o(y^2) - 1 + y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) + y^2 + \frac{y^3}{2}}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-12y^2}{y^2} = -12$$

$$5^o i) I = \int \frac{2 \sin x \cos x + (1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin^3 x + 1} dx =$$

$$\sin x = t$$

$$\cos x dx = dt$$

$$= \int \frac{2t + 1 - t^2}{t^3 + 1} dt = \int \left( \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \right) dt =$$

$$\int \frac{(A+B)t^2 + (-A+B+C)t + A+C}{(t+1)(t^2-t+1)} dt \Rightarrow \begin{cases} A+B = -1 \\ -A+B+C = 0 \\ A+C = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= -\frac{2}{3} \\ B &= -\frac{1}{3} \\ C &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

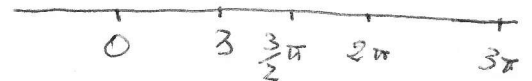
$$= \int \frac{-\frac{2}{3}}{t+1} dt + \int \frac{-\frac{1}{3}t + \frac{5}{3}}{t^2-t+1} dt = -\frac{2}{3} \lg|t+1| - \frac{1}{3} \int \frac{2t-10}{t^2-t+1} dt$$

$$= -\frac{2}{3} \lg|t+1| - \frac{1}{6} \lg(t^2-t+1) + \frac{9}{6} \int \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt$$

$$= -\frac{2}{3} \lg|t+1| - \frac{1}{6} \lg(t^2-t+1) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C$$

ii) Poiché  $h$  è definita per  $\sin^3 x \neq -1 \Leftrightarrow \sin x \neq -1$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



seguendo  $h$  è definita e continua in  $[0, 3]$  intervallo chiuso e limitato, e quindi  $h$  è integrabile in senso classico in  $[0, 3]$ . Poiché

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^+} \frac{\sin^2 x + \cos^3 x}{(\sin^2 x - \sin x + 1)(\sin x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^+} \frac{(2 \sin x + \cos^2 x)}{\sin^2 x - \sin x + 1} \cdot \frac{\cos x}{\sin x + 1} = -\frac{2}{3} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos(y + \frac{3}{2}\pi)}{\sin(y + \frac{3}{2}\pi) + 1}$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $-\frac{2}{3}$   $\frac{0}{0}$   $x - \frac{3}{2}\pi = y$

$$= -\frac{2}{3} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{- \cos y + 1} = -\frac{2}{3} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\frac{y^2}{2}} = \infty \quad \text{con ord. 1}$$

$h$  non è integ. in s. i. in  $]\frac{3}{2}\pi, 3\pi]$ .