

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

17 luglio 2018

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$z^4 - 2iz^2 + 1 = i^{78} + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16}} \right)^{48}.$$

2. Studiare la seguente disequazione

$$\arccos \left(\frac{|\ln x| - 1}{\ln^2 x + 2} \right) \geq \frac{\pi}{3}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x^2} \right)}{e^x - \sqrt{1+2x}}.$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x^2 - 1},$$

i) calcolare l'insieme delle primitive,

ii) dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso classico o in senso improprio in $[0, 1]$, in $[0, \frac{1}{2}]$ e in $[2, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $i^{78} = (i^4)^{19} \cdot i^2 = 1^{19} \cdot (-1) = -1$

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16}} \right)^{48} = \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \right) \right)^{48} =$$

$$= \cos 48 \cdot \frac{\pi}{16} + i \sin 48 \cdot \frac{\pi}{16} = -1$$

l'equazione diventa

$$z^4 - 2iz^2 + 3 = 0 \Rightarrow z^2 = i \pm \sqrt{-1-3} = i \pm 2i = \begin{cases} -i \\ 3i \end{cases}$$

$$z^2 = -i \Rightarrow z = \sqrt{\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi} = \left\{ \cos \left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2} \right) \mid k \in \{0, 1\} \right\}$$

$$= \left\{ \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi, \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

$$z^2 = 3i \Rightarrow z = \sqrt{3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})} = \left\{ \sqrt{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) \mid k \in \{0, 1\} \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), -\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$$

l'equazione ha 4 soluzioni: $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \pm \frac{\sqrt{6}}{2} (1+i).$

2. $\arccos \left(\frac{|\ln x| - 1}{\ln^2 x + 2} \right) \geq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{|\ln x| - 1}{\ln^2 x + 2} \leq \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{|\ln x| - 1}{\ln^2 x + 2} \geq -1 \\ \frac{|\ln x| - 1}{\ln^2 x + 2} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

Poiché il denominatore è sempre > 0
 $\forall x > 0$, si passa al sistema equivalente

$$\begin{cases} |\ln x| - 1 \geq -\ln^2 x - 2 \\ 2|\ln x| - 2 \leq \ln^2 x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\ln x|^2 + |\ln x| + 1 \geq 0 & \Delta < 0 \\ |\ln x|^2 - 2|\ln x| + 4 \geq 0 & \Delta < 0 \end{cases}$$

Entrambe le disuguaglianze di II° grado in $|ln x|$ hanno

$\Delta < 0$ e sono perciò soddisfatte $\forall x \geq 0$ (cioè sempre nel loro dominio).

3. $f(x) = e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}$

$ID = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

f è pari poiché

$f(-x) = f(x) \quad \forall x \neq \pm 1$ (f è simmetrico rispetto a y)

$\begin{cases} x=0 \\ y=e^{-1} \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} = 0 \end{cases}$

ϕ

$(0, e^{-1})$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in ID$

(restando di funz. esponenziale)

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} = e^0 = 1$

$y=1$ As. orizzontale a $\pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm 1} e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$
 $y = -\frac{1}{|x^2-1|}$

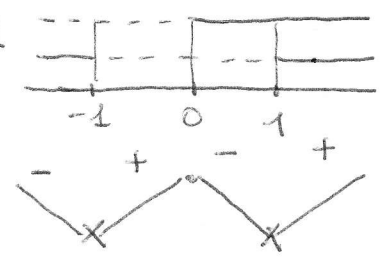
Per $x = \pm 1$ $\nexists$ As. Verticali
 f prolungabile per continuità

$y' = e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} \left(+ \frac{\frac{x^2-1}{|x^2-1|} \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \right)$

$ID y' = ID y = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$y' \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-1)x > 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x > 0 \end{cases}$



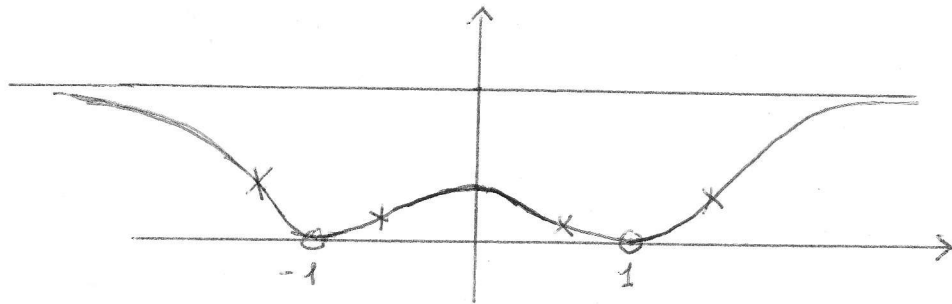
$M \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{e} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \pm 1^\pm} y' = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}}{(x^2-1)^2} \cdot 2x \frac{x^2-1}{|x^2-1|} = 0$
The diagram shows the limit process: the denominator $(x^2-1)^2$ goes to $\frac{0}{0}$, the numerator $2x \frac{x^2-1}{|x^2-1|}$ goes to ± 1 .

per gli ordini poichè
 $e^y \rightarrow 0$ molto velocemente
 $y \rightarrow -\infty$
e quindi con ord 2 (o ord den.)

Analogamente $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} y' = 0$. I ± 1 sono di minimo rel. e assoluto per il prolungamento conti. di f .

Non serve studiare le derivate seconde per dedurre dallo studio del limite di y' per $x \rightarrow \pm 1$ la presenza di 4 flessi.



4. Poiché $\ln(1+x) = x + o(x^2)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$(1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (4x^2) + o(x^2)$$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{x^2} - 1}{x + \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^2}{2}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + (\frac{1}{x^4})} \cdot (-\frac{2}{x^3})}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^4}{\pi(x^4+1)x^4} = -\frac{2}{\pi}.$$

5.i) Poiché $\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x^2 \frac{1-x}{x}} = x \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ poiché $t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \Rightarrow$
 $(\text{poiché } ID = [0,1]) \quad x = \frac{1}{1+t^2}$

o Per

$$\int \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x^2-1} dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2} \cdot t}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 - 1} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= \int \frac{2t^2}{(1+t^2)(t^4+2t^2)} dt = 2 \int \frac{1}{(1+t^2)(2+t^2)} dt = 2 \int \left(\frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+2} \right) dt$$

dove A, B, C, D sono tali da

(4)

$$At^3 + 2At + Bt^2 + 2B + Ct^3 + Ct + Dt^2 + D = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 2A+C=0 \\ 2B+D=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=C=0 \\ B=1 \\ D=-1 \end{cases}$$

$$= 2 \int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+2} \right) dt = 2 \left(\arctan t - \int \frac{1}{2 \left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]} dt \right)$$

$$= 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{\frac{1-x}{2x}} + C.$$

ii) Poiché $\exists D \ h = [0, 1[$ h è integrabile in senso classico in $[0, \frac{1}{2}]$ essendo continua in un intervallo chiuso e limitato.

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x-1)(x+1)} = -\infty$$

con ordine $\frac{1}{2} < 1$
poiché ord di infinitesimo
del numeratore è $\frac{1}{2}$
e del denominatore 1,

h è integrabile in s.i. in $[0, 1[$.

Non è integrabile in $[-2, +\infty)$ in senso classico né in senso
improprio non essendo definita in tale intervallo.