

Corso di laurea in Chimica

Esame-esonero di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

19 febbraio 2018

1. Risolvere il seguente sistema nel campo complesso

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z^2)\operatorname{Im}(z^2) = 0 \\ z\bar{z} = 4 \end{cases}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = |x^2 + x| + \arctan \frac{x+1}{x} - x^2$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x - \ln(1 + x \sin x)}{\left(x - \arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|} \right]^2.$$

4. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, l'integrabilità in senso improprio della funzione

$$g(x) = \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right]^\alpha$$

negli intervalli $]0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, +\infty)$.

5. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{1}{(2x-1)^2} \ln(\sqrt{-x^2+x+2}) dx.$$

N.B. Coloro che hanno superato il primo esonero devono fare solo gli ultimi 3 esercizi.

Svolgimento

1. Posto $z = a + ib$, si ha $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ e quindi si ha
 $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

$$\begin{cases} (a^2 - b^2) \cancel{2ab} = 0 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm b \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ a^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm b \\ \cancel{2}a^2 = \cancel{2}4 \\ 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ a = \pm 2 \end{cases}$$

Dunque il sistema ha 8 soluzioni: $z_{1,2} = \pm\sqrt{2}(1+i)$, $z_{3,4} = \pm\sqrt{2}(1-i)$
 $z_{5,6} = \pm 2i$, $z_{7,8} = \pm 2$

2. $ID = \mathbb{R}^*$ $f(-x) \neq \pm f(x)$ e quindi non è né simmetrica
 Poiché non si riesce a studiare $f(x) = 0$ e $f(x) > 0$
 omettiamo lo studio delle intersezioni con asse x
 e delle positività.

Asintoti Verticali

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} |x^2 + x| + \arctg \frac{x+1}{x} - x^2 = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \arctg y = \pm \frac{\pi}{2} \quad \nexists \text{ as. vert.}$$

Asintoti orizzontali

$$\text{Poiché } |x^2 + x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ -x^2 - x & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases} \quad \text{si ha:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{x^2 + x}_{\pm\infty} + \underbrace{\arctg \frac{x+1}{x}}_{\arctg 1 = \frac{\pi}{4}} - \cancel{x^2} = \pm\infty \quad \nexists \text{ as. orizz.}$$

Asintoti obliqui

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \arctg(\frac{x+1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\arctg \frac{x+1}{x}}{x} \right) = 1$$

(eventuale coefficiente angolare dell'asintoto obliquo)

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x + \arctg \frac{x+1}{x} - x = \frac{\pi}{4} \quad (9)$

$y = x + \frac{\pi}{4}$ Az. obliquo a $\pm \infty$

Studio della derivata 1^a

$y' = \frac{x^2+x}{|x^2+x|} (2x+1) + \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2} \frac{x - x - 1}{x^2} - 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad x \neq -1$

Poiché $y' = \begin{cases} 2x+1 - \frac{1}{2x^2+2x+1} - 2x & x < -1 \vee x > 0 \\ -2x-1 - \frac{1}{2x^2+2x+1} - 2x & -1 < x < 0 \end{cases}$

segue che $\lim_{x \rightarrow -1^-} y' = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 - \frac{1}{2x^2+2x+1} = 0 \quad (= f'_-(-1))$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y' = \lim_{x \rightarrow -1^+} -4x-1 - \frac{1}{2x^2+2x+1} = 2 \quad (= f'_+(-1))$

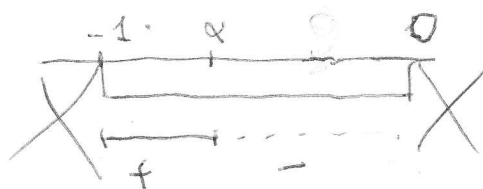
e quindi $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ pts angoloso per f

Inoltre $y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ 1 - \frac{1}{2x^2+2x+1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -4x-1 - \frac{1}{2x^2+2x+1} > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ \frac{2(x^2+x)}{2x^2+2x+1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{8x^3+10x^2+6x+2}{2x^2+2x+1} > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x < -1 \vee x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 4x^3+5x^2+3x+1 < 0 \end{cases}$

$x < -1 \vee x > 0$



e quindi $P(x) < 0$ se $-1 < x < \alpha$

$\Leftrightarrow$ poiché il denominatore è sempre > 0

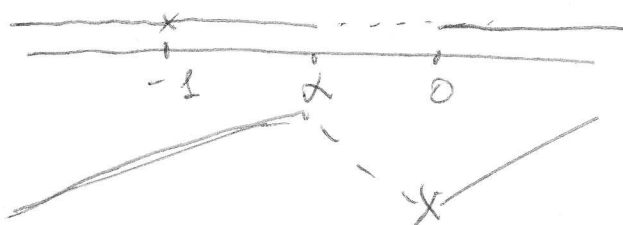
Il polinomio P può avere come radici in $\mathbb{R}$ solo $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ ma tutti

diretti, ci dicono che nessuno di questi numeri è radice.

Però $\exists \alpha \in]-1, 0[$ s.t. $P(\alpha) = 0$
 poiché $P(-1) = -1 < 0 < P(0) = 1$
 (Teor. degli zeri)

Concludendo $y' > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \vee 0 < x \vee x < -1$

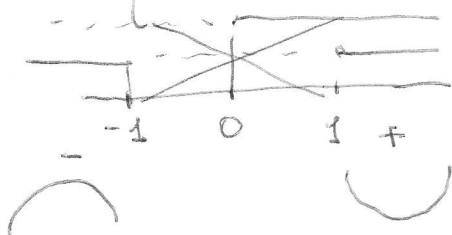
(3)



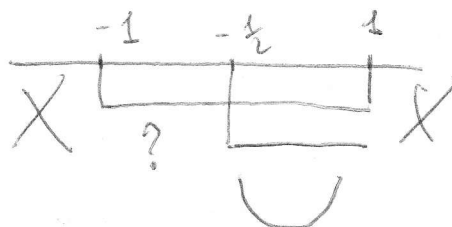
$x = x$ pto di max rel.

$$y'' = \begin{cases} D\left(1 - \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}\right) = \frac{4x + 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ D(-4x - 1 - \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}) = 4 + \frac{4x + 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2} & \text{se } -1 < x < 1 \wedge x \neq 0 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ 4x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \wedge x \neq 0 \\ 4(2x^2 + 2x + 1)^2 + 4x + 2 > 0 \end{cases}$$



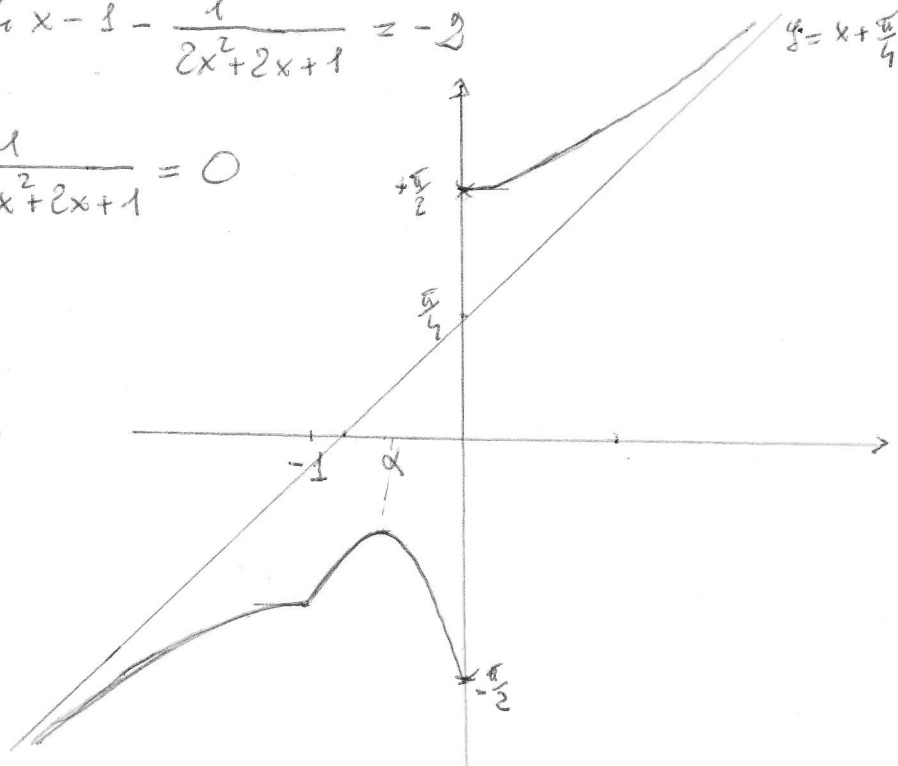
è di nuovo > 0 se $x > -\frac{1}{2}$
non lo segno se $x < -\frac{1}{2}$



Per decidere comportamento delle funzione, osservo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -4x - 1 - \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} = 0$$



Poiché $\arcsen^2 x \approx \left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2 \approx x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} \approx x^2 + \frac{x^4}{3}$

$$\lg(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lg(1+x \operatorname{sen} x) &\approx x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen}^2 x \approx x \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{x^2}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 \\ &\approx x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}\right) \approx x^2 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) x^4 = x^2 - \frac{2}{3} x^4 \end{aligned}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

sostituendo nel limite si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{2}{3} x^4}{\left(x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \left[\frac{1}{|x|} (\sqrt{x^2+1} - 1) \right]^2 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} (1+x^2)}{\cancel{x^2} (\sqrt{1+x^2}-1)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} (\sqrt{x^2+1}-1)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{(\sqrt{1+x^2}-1)^2} = 1$$

4. La funzione $g(x)$ è definita per $\begin{cases} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} > 0 \\ 1+\frac{1}{x^2} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} > \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\frac{1}{x^2} \geq 0 \\ \frac{1}{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \neq 0 \quad \vee \begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \\ 1+\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 0$$

cioè $ID = \mathbb{R}^*$

g è continua in $[0, 1]$ e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty} \right)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} \right)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{2} x^2}{x} \right)^\alpha = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Segue che g è integrabile in senso improprio, anzi in senso classico, in $[0, 1]$. Inoltre g è integ. in s.i., anzi in senso classico, in $[1, 2]$ essendo continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1, 2]$. Infine

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right)^\alpha = 1^\alpha = 1 \neq 0 \quad \forall \alpha > 0 \Rightarrow g \text{ non è integ. in s.i. in } [2, +\infty).$$

5. $\int \frac{1}{(2x-1)^2} \ln(\sqrt{-x^2+x}+2) dx = \int \Delta\left(-\frac{1}{2(2x-1)}\right) \ln(\sqrt{-x^2+x}+2) dx$ (5)

P.P. $= -\frac{1}{2(2x-1)} \ln(\sqrt{-x^2+x}+2) + \int \frac{1}{2(2x-1)} \frac{1}{\sqrt{-x^2+x}+2} \cdot \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} dx$

$= -\frac{\ln(\sqrt{-x^2+x}+2)}{2(2x-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2(-x^2+x)+4\sqrt{-x^2+x}}$

Risolvo

$\int \frac{dx}{-x^2+x+2\sqrt{-x^2+x}} =$

$\sqrt{-x^2+x} = \sqrt{x^2(1-x)} = |x| \sqrt{\frac{1-x}{x}} = x \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

perché $-x^2+x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

Por lo tanto $t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \Rightarrow t^2 x = 1-x$

$x = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt$

$= \int \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt =$

$= \int \frac{-2t}{-1+1+t^2+2t+2t^3} dt = -2 \int \frac{t}{t(2t^2+t+2)} dt = -2 \int \frac{1}{2t^2+t+2} dt = -\frac{2 \cdot 2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{15}} + C$
 $\Delta = -15$

$= -\frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4t+1}{\sqrt{15}} + C = -\frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{\frac{1-x}{x}}+1}{\sqrt{15}} + C$

Concluendo:

$\int \frac{1}{(2x-1)^2} \ln(\sqrt{-x^2+x}+2) dx = -\frac{\ln(\sqrt{-x^2+x}+2)}{2(2x-1)} + \frac{1}{4\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{\frac{1-x}{x}}+1}{\sqrt{15}} + C$
 $= -\frac{\ln(\sqrt{-x^2+x}+2)}{2(2x-1)} + \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{\frac{1-x}{x}}+1}{\sqrt{15}} + C$