

Corso di laurea triennale in Chimica

Esonero di Istituzioni di Matematiche I

Traccia A

8 Gennaio 2018

1. Risolvere nel campo complesso la seguente equazione

$$\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right]^3 z^2 = (i^{91} - 16i^{84}) \operatorname{Re} z + i \left(\frac{\cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14}}\right)^{21} z \cdot \bar{z}$$

e disegnare poi le soluzioni trovate nel campo complesso.

2. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$y = \left(\frac{3(\ln x^2)^2 - 7|\ln x| + 1}{x - \sqrt{16 - x^2}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 3x^2 - 4},$$

- i) determinare gli eventuali asintoti,
- ii) trovare il codominio.

4. Date le funzioni

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \sin^3 x \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

provare che g e h sono continue e derivabili, inoltre h' è continua mentre g' non lo è.

Svolgimento

1. Poiché $[2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]^3 = 8(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = 8i$

$$i^{31} = (i^4)^{22} \cdot i^3 = 1^{22} \cdot i^2 \cdot i = -i, \quad i^{84} = (i^4)^{21} = 1$$

$$\left(\frac{\cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14}} \right)^{21} = \left(\cos \left(\frac{3}{14} - \frac{1}{14} \right) \pi + i \sin \left(\frac{3}{14} - \frac{1}{14} \right) \pi \right)^{21}$$

$$= \cos^{21} \frac{2}{14} \pi + i \sin^{21} \frac{2}{14} \pi = \cos \pi = -1$$

l'equazione diventa

$$8i z^2 = (-i - 16) \operatorname{Re} z + i z \cdot \bar{z}. \quad \text{Posso } z = a + ib \text{ con } a, b \in \mathbb{R}:$$

$$8i(a^2 - b^2 + 2abi) = (-i - 16)a - i(a^2 + b^2) \Leftrightarrow$$

$$8(a^2 - b^2)i - 16ab = -ai - 16a - i(a^2 + b^2) \Leftrightarrow$$

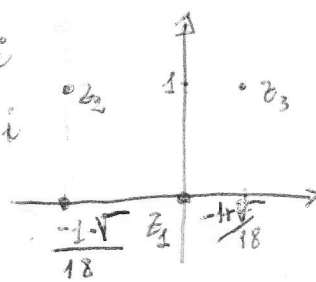
$$\begin{cases} 8(a^2 - b^2) = -a - a^2 - b^2 \\ -16ab = -16a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 7b^2 + a = 0 \\ ab = a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7b^2 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} 9a^2 + a - 7 = 0 \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

$$a_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{253}}{18} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{253}}{18} \\ \frac{-1 - \sqrt{253}}{18} \end{cases}$$

$$z_2 = -1 + i$$

$$z_3 = \frac{7}{18} + i$$



2. $\frac{3(\ln x^2)^2 - 7|\ln x| + 1}{x - \sqrt{16 - x^2}} \geq 0$

Applico la regola del segno nel dominio della frazione $\begin{cases} x > 0 \\ 16 - x^2 \geq 0 \end{cases}$
cioè in $[0, 4]$
 $-4 \leq x \leq 4$

$$N \geq 0 \quad 3(2\ln|x|)^2 - 7|\ln x| + 1 \geq 0$$

$$12|\ln|x||^2 - 7|\ln x| + 1 \geq 0$$

$$|\ln x|_{1/2} = \frac{7 \pm 1}{24} = \begin{cases} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

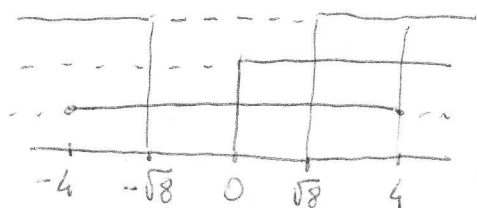
$$|\ln x| \leq \frac{1}{3} \vee |\ln x| \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3} \leq \ln x \leq \frac{1}{3} \vee \ln x \leq -\frac{4}{3} \vee \ln x \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

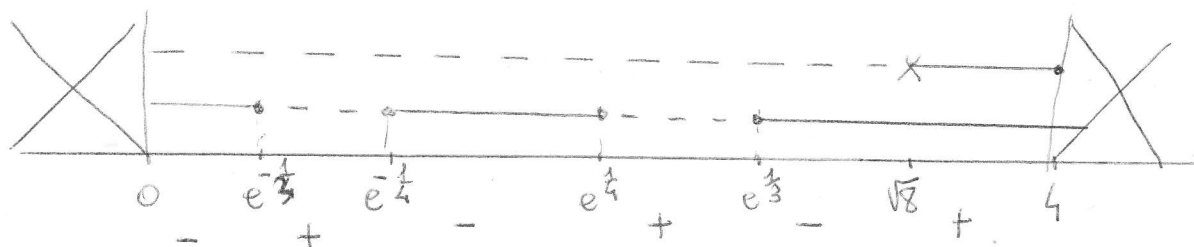
$$e^{-\frac{1}{3}} \leq x \leq e^{\frac{1}{3}} \vee 0 < x \leq e^{-\frac{4}{3}} \vee x \geq e^{\frac{4}{3}}$$

$$D > 0 \quad x - \sqrt{16-x^2} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{16-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 > 16-x^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x > 0 \\ x^2 - 8 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x > 0 \\ x < -\sqrt{8} \vee x > \sqrt{8} \end{cases}$$



$$\sqrt{8} < x \leq 4$$



$$ID = [e^{-\frac{1}{3}}, e^{-\frac{1}{4}}] \cup [e^{\frac{1}{4}}, e^{\frac{1}{3}}] \cup [\sqrt{8}, 4]$$

$$3. \quad ID: x^4 - 3x^2 - 4 \geq 0$$

$$\text{Boxo } x^2 = y \quad \text{where } y_{\pm} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}$$

$$y \leq -1 \vee y \geq 4 \quad \text{cioe}$$

$$ID = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$x^2 \leq -1 \vee x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$$

i) $\nexists$ asimptote verticali poiche $\pm 2, -2 \in ID$.

$$\nexists \text{ asimptote orizzontali poiche } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[4]{x^4 - 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{x^2} = +\infty.$$

Cercio asimptote oblique

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 - 3x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 - 3x^2 - 4} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[4]{1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4} \right) \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4} \right)^{\frac{1}{4}} - 1}{-\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4} \right)^{\frac{1}{4}} - 1}{-\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{x^4 - 3x^2 - 4} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt[4]{1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}} + x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(-\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4} \right) \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0$$

$$y = x \quad \text{As. ob. a } +\infty$$

$$y = -x \quad \text{As. ob. a } -\infty$$

it) Poiché f è pari, si ha $f((-\infty, -2] \cup [2, +\infty)) = f([2, +\infty)) = [0, +\infty)$
 poiché $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3 - 6x}{4\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 - 4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$
 non accett. perché $\notin \text{ID}(f)$
 $\nexists f'(x) \Leftrightarrow x = \pm 2$ (o meglio $f'(\pm 2) = \pm \infty$)

$f(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e quindi $\min_{\text{ID}} f(x) = 0$, $\sup_{\text{ID}} f(x) = +\infty$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \cos \frac{1}{x} = 0 = g(0) \Rightarrow g$ cont. in $x=0$
 (prodotto di funzioni infinitesime per funz. limitata)

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin^3 x \cos \frac{1}{x} = 0 = h(0) \Rightarrow h$ cont. in $x=0$

segue che g e h sono continue (in $\mathbb{R}$) poiché per $x \neq 0$ sono ottenute operando con funzioni continue. Per lo stesso motivo g e h sono derivabili con derivate continue $\forall x \neq 0$ con

$$g'(x) = 2 \sin x \cos x \cos \frac{1}{x} - \sin^2 x \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \forall x \neq 0$$

$$h'(x) = 3 \sin^2 x \cos x \cos \frac{1}{x} - \sin^3 x \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sin x \cdot \cos \frac{1}{x}}_{\downarrow 0} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sin^2 x \cdot \cos \frac{1}{x}}_{\downarrow 0} = 0$

quindi g e h sono derivabili anche per $x=0$ con $g'(0) = h'(0) = 0$.

Si osserva infine che

$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{2 \sin x \cos x \cos \frac{1}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\nexists}$

$\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{3 \sin^2 x \cos x \cos \frac{1}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sin x \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\downarrow 0} = 0 = h'(0)$

quindi g' non è continua (poiché non è continua in $x=0$) mentre h' è continua in tutto $\mathbb{R}$ e quindi è continua.