

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

19 settembre 2017

1. Studiare nel campo complesso la seguente equazione

$$|z^6 + 9z^3 + 8| = i^{91} - \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)^{10}.$$

2. Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\ln \ln \frac{1}{2} \frac{2 + \sqrt{|x|}}{x+1}}.$$

3. Studiare la funzione

$$g(x) = \frac{4}{3} \sqrt{\ln^3 |x+1|} - \ln(x+1)^2.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

4. Dire per quale valore di $n \in \mathbb{N}$ il seguente limite esiste finito e calcolarlo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \left(\sin \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right)}{x \tan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2+1}}.$$

5. Calcolare

$$\int e^{3(x-1)} \frac{\arctan e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

6. Data la funzione

$$h(x) = \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}},$$

dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso improprio in $] -1, 0[$, in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $i^{93} = i^{88} \cdot i^5 = (i^4)^{22} \cdot i^2 \cdot i = -i$

$$\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)^{40} = \cos\frac{15}{2}\pi + i\sin\frac{15}{2}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 7\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 7\pi\right)$$

l'equazione diventa $-i$

$$|z^6 + 9z^3 + 8| = 0 \Leftrightarrow z^6 + 9z^3 + 8 = 0 \quad \text{posto } z^3 = w:$$

$$w^2 + 9w + 8 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{-9 \pm 7}{2} = \begin{cases} -8 \\ -1 \end{cases}$$

$$z^3 = -8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = \left\{ 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z^3 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{\cos\pi + i\sin\pi} = \left\{ \cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

$$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_1 = -1 \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

L'equazione ha 6 radici nel campo complesso.

2. $\ln \ln_{\frac{1}{2}} \frac{2+\sqrt{|x|}}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \ln_{\frac{1}{2}} \frac{2+\sqrt{|x|}}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2+\sqrt{|x|}}{x+1} \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \frac{2+\sqrt{|x|}}{x+1} > 0 \\ \frac{2+\sqrt{|x|}}{x+1} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 & (\text{poiché } 2+\sqrt{|x|} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}) \\ 4+2\sqrt{|x|} \leq x+1 & (\text{possiamo togliere denominatore perché sempre } \neq 0 \text{ nel dominio}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ 2\sqrt{|x|} \leq x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 4|x| \leq (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 4x \leq x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

(possiamo togliere valore assoluto essendo $x > 3 > 0$)

$$\begin{cases} x > -1 \\ x \geq 3 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 3 \\ x \leq 1 \vee x \geq 9 \end{cases} \quad ID = [9, +\infty)$$

3. ID $\begin{cases} \ln^3|x+1| \geq 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|x+1| \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| \geq 1 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 0$

ID = $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

La funzione non è pari né dispari
ma simmetrica rispetto alla retta $x = -1$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \frac{2}{3}(\ln|x+1|)^{3/2} - 2\ln|x+1| = 0 \end{cases} \quad \ln|x+1| \left(\frac{2}{3}\sqrt{\ln|x+1|} - 1 \right) = 0$

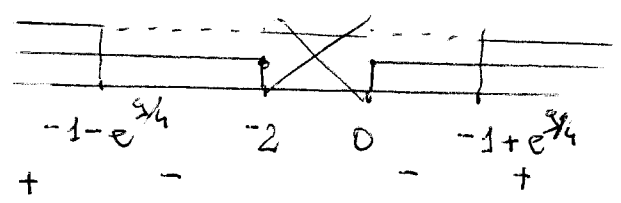
$\Leftrightarrow \ln|x+1| = 0 \vee \ln|x+1| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x+1 = 1 \vee |x+1| = e^{9/4}$

Le intersezioni con gli assi sono $(0,0)$, $(e^{9/4}-1, 0)$, $(-e^{9/4}-1, 0)$

$y > 0 \Leftrightarrow \ln|x+1| \left(\frac{2}{3}\sqrt{\ln|x+1|} - 1 \right) > 0 \Leftrightarrow \ln|x+1| < 0 \vee \ln|x+1| > \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| < 1 \vee |x+1| > e^{9/4} \\ x \in \text{ID} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \vee x < -1+e^{9/4} \vee x > -1+e^{9/4} \\ x \leq -2 \vee x \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x < -1 - e^{9/4} \vee x > -1 + e^{9/4}$

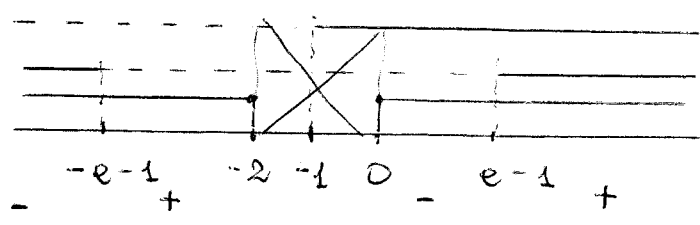


$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2}{3} \sqrt{\ln^3|x+1|} - 2\ln|x+1| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} y^{3/2} - 2y = +\infty$ (per gli ordini)
 $y = \ln|x+1|$

Non osservabile ∇ as. oblique perché $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ (per gli ordini perché il logaritmo è infinitesimo piccolo)

$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\ln|x+1|} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x+1} (\sqrt{\ln|x+1|} - 1)$

$y' > 0 \Leftrightarrow N > 0 \quad \sqrt{\ln|x+1|} > 1 \Leftrightarrow \ln|x+1| > 1 \Leftrightarrow |x+1| > e \Leftrightarrow x < -1-e \vee x > e-1$
 $D > 0 \quad x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$



La funzione è crescente in $[-e-1, -2]$ e in $[e-1, +\infty)$

in $\begin{cases} x = -e-1 \\ y = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$ in $\begin{cases} x = e-1 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

(3)

$$y'' = 2 \left[-\frac{1}{(x+1)^2} (\sqrt{\ln|x+1|} - 1) + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln|x+1|}} \cdot \frac{1}{x+1} \right]$$

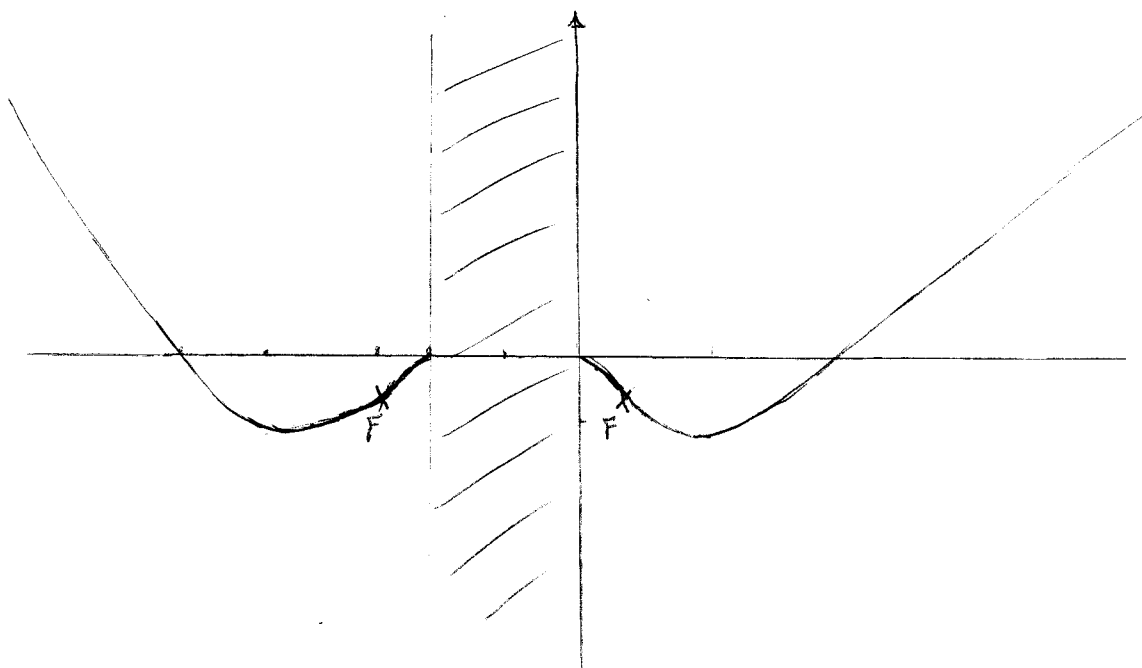
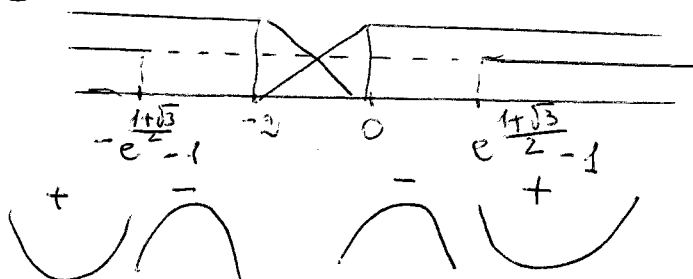
$$= \frac{2}{(x+1)^2} \left(-\sqrt{\ln|x+1|} + 1 + \frac{1}{2\sqrt{\ln|x+1|}} \right) = \frac{2}{(x+1)^2} \frac{-2\sqrt{\ln|x+1|} + 2\sqrt{\ln|x+1|} + 1}{2\sqrt{\ln|x+1|}}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln|x+1|} - 2\sqrt{\ln|x+1|} - 1 < 0$$

Posso $t = \sqrt{\ln|x+1|}$: $2t^2 - 2t - 1 < 0$ $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < t < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} < \sqrt{\ln|x+1|} < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \ln|x+1| < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| < e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} - 1 \vee x > e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} - 1 \\ x \leq -2 \vee x \geq 0 \end{cases}$$



4. Poider $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
 $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

il limite di Senke

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{6x^6} - \frac{1}{x^2+1} \right)}{x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} \right) - \frac{x^2}{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^n}{6} (6x^4(x^2+1) - x^2 - 1 - 6x^6) / (x^2+1)x^6}{1 + \frac{1}{3x^2} - 1 + \frac{1}{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^7} (6x^4 - x^2 - 1)}{\frac{x^2 + 1 + 3x^2}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \cdot \cancel{6x^4}}{\frac{\cancel{6x^6}}{\frac{4x^2}{3x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \cdot \frac{3}{4x^2} = \frac{3}{4}$$

et $n=2$

5. $\int e^{3(x-1)} \frac{\operatorname{arctg} e^x}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{e^3} \int t^2 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt \quad e^x = t \quad e^x dx = dt$

$$= \frac{1}{e^3} \int \frac{t^2}{1+t^2} \operatorname{arctg} t dt = \frac{1}{e^3} \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \operatorname{arctg} t dt$$

$$= \frac{1}{e^3} \left(\int \operatorname{arctg} t dt - \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt \right) = \frac{1}{e^3} \left[t \operatorname{arctg} t - \int \frac{t}{1+t^2} dt - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 t \right] + C$$

$$= \frac{1}{e^3} \left(t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \lg(t^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 t \right) + C = \frac{1}{e^3} \left(e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \lg(e^{2x}+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 e^x \right) + C$$

6. Paire h est définie sur $\mathbb{R} - \{0, -1\}$ et

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{0^+} e^{-1} = -\infty \quad \text{car ord } 1 \Rightarrow h \text{ non intég. in s.i. in }]-1, 0[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty \quad \text{car ordise communique grande} \Rightarrow h \text{ non intég. in s.i. in }]0, 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot e^0 = 1 \neq 0 \Rightarrow h \text{ non intég. in s.i. in } [1, +\infty)$$