

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

18 luglio 2017

1. Studiare nel campo complesso la seguente equazione

$$i|z|^2 - 2|z|^2 + \bar{z}^2 + 4z = 1 - i.$$

2. Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \left(\ln_3 \left[-\ln_{0,5} \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} \right] \right)^{\frac{1}{x-6}}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{2x + \sqrt{|4x^2 - x|}}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo (si può omettere lo studio della derivata seconda).

4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x) - \tan^2 x}{\sin^2 x - \arctan^2 x}.$$

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{\sqrt{2x^2 - 1}},$$

i) calcolare l'insieme delle primitive,

ii) dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso improprio in $[0, 1]$, in $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$ e in $[1, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = x + iy$ si ha $\bar{z} = x - iy$ $|z|^2 = x^2 + y^2$
 $z^2 = x^2 + 2xyi - y^2$ $(\bar{z})^2 = x^2 - 2xyi - y^2$

L'equazione diventa

$$i |x^2 + 2xyi - y^2 - x^2 - 2y^2 + x^2 - 2xyi - y^2| + 4x + 4yi = 1 - i$$

cioè $i |-4y^2| + 4x + 4yi = 1 - i \Leftrightarrow 4y^2i + 4x + 4yi = 1 - i$

(poiché $-4y^2 \in \mathbb{R}$ bisogna fare il valore assoluto)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 1 \\ 4y^2 + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ 4y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases} \quad y_{1/2} = -\frac{1}{2} \quad z = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i$$

unica soluzione

2. Si ricorda che $(f(x))^{g(x)}$ è definita $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \left[-\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} \right] > 0 \\ x \neq 6 \end{cases} \vee \begin{cases} \log_3 \left[-\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} \right] = 0 \\ \frac{1}{x-6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} > 1 \\ x \neq 6 \end{cases} \vee \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} = 1 \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \text{poiché } -\log_{\frac{1}{2}} = \log_2$$

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} > 1 \\ x \neq 6 \end{cases} \vee \begin{cases} \log_2 \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} = 1 \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} > 2 \\ x \neq 6 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{x-4}{2+\sqrt{x}} = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-4-4-2\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} > 0 \\ x \neq 6 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{x-4-4-2\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = 0 \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-8 > 2\sqrt{x} \\ x \neq 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x-8 = 2\sqrt{x} \\ x > 6 \end{cases}$$

$$2\sqrt{x} - (\sqrt{x})^2 + 8 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 8 > 0 \quad \sqrt{x} = \frac{1 \pm 3}{1} = \begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} < -2 \vee \sqrt{x} > 4 \\ x \neq 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} = -2 \vee \sqrt{x} = 4 \\ x > 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 16 \vee x = 16$$

$$ID = [16, +\infty)$$

3. ID: $2x + \sqrt{4x^2 - x} \neq 0$

Studio l'equazione $\sqrt{4x^2 - x} = -2x$

Segue da

$$ID(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

f non è pari né dispari

f non ha intersezioni con gli assi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ |4x^2 - x| \neq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x^2 - x = 4x^2 \vee \begin{cases} 4x^2 - x = -4x^2 \\ 4x^2 - x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ 8x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} < x < 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$\emptyset$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} > 0$$

$$N > 0$$

$$x > 0$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - x} \geq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \leq 0 \\ |4x^2 - x| \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2x \geq 0 \\ |4x^2 - x| > 4x^2 \end{cases}$$

$$\Delta > 0 \quad \text{---} \quad x$$

$$\Delta > 0 \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$\text{---} \quad \frac{x}{0} \quad \text{---}$$

$$\text{---} \quad - \quad 0 \quad +$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x^2 - x < -4x^2 \vee 4x^2 - x > 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ 0 < x < \frac{1}{8} \end{cases} \vee x < 0 \Leftrightarrow \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x}} = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

trascuro $4x^2$ infinitesimo più veloce di $-x$ $\rightarrow$ trascuro $2x$ infinitesimo più veloce di $2x$

f è prolungabile per continuità per $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x + \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x + 2x} = \frac{1}{4}$$

trascuro $-x$ infinito
più lento di $4x^2$

$$y = \frac{1}{4} \text{ As. or. } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x + \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{0^+}$$

Cerco asintoto obliquo a $-\infty$. (ricordo che $D > 0 \forall x \neq 0$) $= -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2 - x}}{(2x + \sqrt{4x^2 - x})(2x - \sqrt{4x^2 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2 - x}}{4x^2 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2x}{x} = 4 \quad (m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} - 4x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 8x^2 - 4x\sqrt{4x^2 - x}}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^2 - 8x^2}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16x^2(2x - \sqrt{4x^2 - x})}{x} = -\infty \end{aligned}$$

As. obliquo a $-\infty$.

Studio delle derivate 1°

$$y' = \frac{2x + \sqrt{4x^2 - x} - x(2 + \frac{8x-1}{2\sqrt{4x^2-x}} \cdot \frac{4x^2-1}{4x^2-x})}{(2x + \sqrt{4x^2-x})^2}$$

$$ID(y') = ID(y) - \{x \mid 4x^2 - x \neq 0\} = \mathbb{R}^+ - \{\frac{1}{4}\}$$

Poi da

$$y' = \begin{cases} \frac{2x + \sqrt{4x^2 - x} - 2x - \frac{8x^2 - x}{2\sqrt{4x^2 - x}}}{(2x + \sqrt{4x^2 - x})^2} & \text{se } x < 0 \vee x > \frac{1}{4} \\ \frac{2x + \sqrt{-4x^2 + x} - 2x + \frac{8x^2 - x}{2\sqrt{-4x^2 + x}}}{(2x + \sqrt{-4x^2 + x})^2} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

si ha che

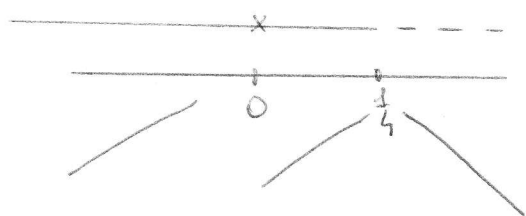
$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} y' = \frac{8 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} y' = \frac{8 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{0^+} = -\infty$$

e quindi $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ pto di cuspidale

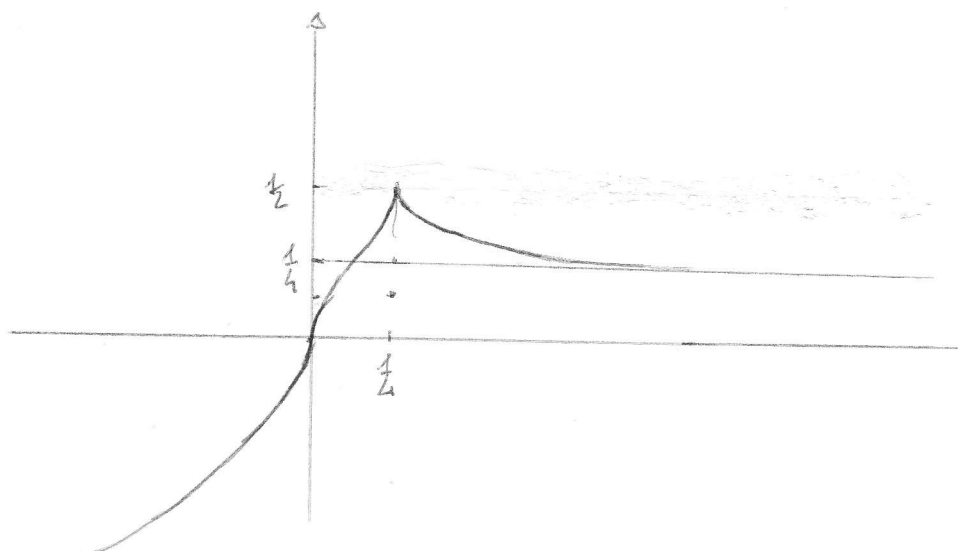
Indice

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \vee x > \frac{1}{4} \\ 2(\sqrt{4x^2 - x}) - 8x^2 + x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{4} \\ 2(-\sqrt{4x^2 - x}) + 8x^2 - x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \vee x > \frac{1}{4} \\ -x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{4} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \vee 0 < x < \frac{1}{4}$$



f str. cres. in $(-\infty, 0[$ e in $]0, \frac{1}{4}[$
f str. decr. in $]\frac{1}{4}, +\infty)$



Per completezza osservando che $x=0$ è pto di flesso a tangente verticale poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-8x^2 + 2x + 8x^2 - x}{2\sqrt{4x^2 - x}(2x + \sqrt{4x^2 - x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8x^2 - 2x - 8x^2 + x}{2\sqrt{4x^2 - x}(2x + \sqrt{4x^2 - x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{2\sqrt{-x}(\sqrt{-x})^2} = +\infty.$$

Poiché

$$\ln(1 + \sin^2 x) \sim \sin^2 x - \sin^4 x \sim \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 \sim x^2 - \frac{x^4}{3} - x^4 \sim x^2 - \frac{4}{3}x^4$$

$$\operatorname{tg}^2 x \sim \left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 \sim x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

$$\sin^2 x - \operatorname{arctg}^2 x = (\sin x + \operatorname{arctg} x)(\sin x - \operatorname{arctg} x)$$

$$\sim 2x \left(x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{3} \right)$$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{4}{3}x^4 - x^2 - \frac{2}{3}x^4}{\frac{2}{3}x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^4}{\frac{2}{3}x^4} = -3 \cdot 2 = -6$$

5. Poiché

$$\text{i)} \quad \begin{aligned} \sqrt{2x^2-1} &= t \\ x^2 &= \frac{1+t^2}{2} \end{aligned} \quad \text{allora} \quad \frac{x}{2\sqrt{2x^2-1}} dx = dt \quad \text{equando}$$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{2x^2-1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{2x^2-1}} \cdot x^4 dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8} \int (t^4 + 2t^2 + 1) dt$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2}{3}t^3 + t \right) + C = \frac{1}{8} \left(\frac{(2x^2-1)^2}{5} + \frac{2}{3}(2x^2-1) + 1 \right) \sqrt{2x^2-1} + C.$$

ii) Poiché la funzione è definita se $2x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup$

non ha senso calcolare l'integrale in $[0, 1]$ poiché f non è definita
 tra $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1; poiché $\int \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-} \frac{x^5}{\sqrt{2x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-} \frac{x^5}{(\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1})^{\frac{1}{2}}} = +\infty \quad \text{con ord } \frac{1}{2} < 1$$

$\downarrow$
 0 con ord $\frac{1}{2}$

f è integrabile in s. o. in $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. Invece non lo è in $[1, +\infty)$ essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{\sqrt{2x^2-1}} = +\infty \quad (\text{per gli ordini}).$$