

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

3 luglio 2017

1. Dopo aver studiato la seguente equazione

$$z^6 - 2iz^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 = 0,$$

disegnare le soluzioni nel campo complesso.

2. Studiare la seguente disequazione

$$\frac{\lg_2(x^2 - 5) + \lg_2 \frac{1}{|x-5|}}{\frac{1}{\lg_2(x-5)} - \frac{1}{\lg_{0,5}(|x|-5)}} \geq 0.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1-x^2}{x^2+|x|}} - e^{\frac{1}{x}}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin^2 x) - \arcsin x^2}{4(\sqrt{1-x} - 1)^2 + (e^{-x} - 1)^2 - x \lg(1+x) - x^2}.$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x - x^2}(x + 1 - x^2)},$$

i) calcolare l'insieme delle primitive,

ii) dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso improprio in $]0, \frac{1}{2}]$, in $[\frac{1}{2}, 1[$ e in $[2, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^8 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

L'equazione diventa $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^3 - i)^2 = 0$

$\Leftrightarrow z^3 = i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right\}$

$k \in \{0, 1, 2\}$

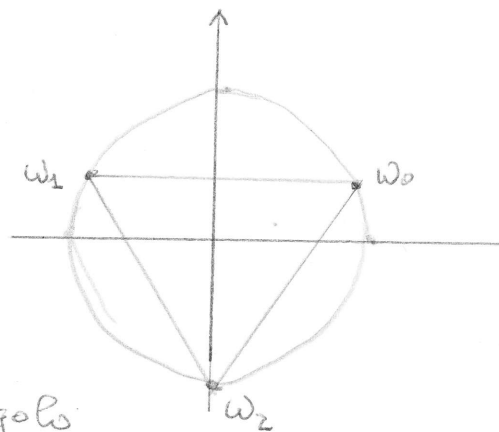
L'equazione ha 6 radici complesse di cui solo 3 distinte

moltiplicata algebrica 2, date da

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$w_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$w_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$



osservo che w_0, w_1, w_2 sono i vertici di un triangolo

equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

2. Studio prima il campo di esistenza della frazione e poi applico la regola del segno.

$$C.E. \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 5 > 0 \\ \frac{1}{|x-5|} > 0 \\ x-5 > 0 \\ \lg_2(x-5) \neq 0 \\ |x|-5 > 0 \\ \lg_{0,5}(|x|-5) > 0 \\ \frac{1}{\lg_2(x-5)} - \frac{1}{\lg_{0,5}(|x|-5)} \neq 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5} \\ x \neq 5 \\ x > 5 \\ x-5 \neq 1 \quad x \neq 6 \\ |x| > 5 \\ |x|-5 \neq 1 \\ \frac{2}{\lg_2(x-5)} \neq 0 \end{array} \right.$$

Nell'ultima relazione si è usato il fatto che

$$\lg_{0,5}(|x|-5) = \frac{\lg_2(|x|-5)}{\lg_2 0,5} = \frac{\lg_2(x-5)}{-1} \quad \text{poiché } x > 5 \quad \text{nel dominio}$$

Segue da $D =]5, 6[\cup]6, +\infty)$. Applico regola del segno per $x > 5$, $x \neq 6$: (2)

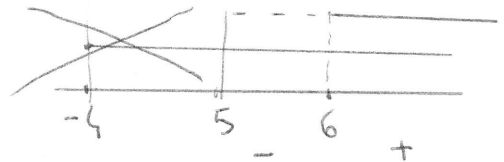
$$N \geq 0 \quad \lg_2(x^2 - 5) + \lg_2(x - 5) \geq 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\lg_2 \left[\overbrace{(x^2 - 5)}^{x+5} \cdot \frac{1}{\cancel{x-5}} \right] \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad \lg_2(x+5) \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x+5 \geq 1$$

$$x \geq -6$$

$$D > 0 \quad \frac{1}{\lg_2(x-5)} - \frac{1}{\lg_2(x-5)} > 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{2}{\lg_2(x-5)} > 0 \quad (\Rightarrow) \quad \lg_2(x-5) > 0$$

$$(\Rightarrow) \quad x-5 > 1 \quad (\Rightarrow) \quad x > 6$$



La disequazione è soddisfatta $\forall x > 6$.

3. Poiché $x^2 = |x|^2$ la funzione diventa

$$f(x) = e^{\frac{(1-|x|)(1+|x|)}{|x|(1+|x|)}} - e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1-|x|}{|x|}} - e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{|x|} - 1} - e^{\frac{1}{x}}$$

cioè $f(x) = \frac{1}{e} e^{\frac{1}{|x|}} - e^{\frac{1}{x}}$ { Se non si fa la semplificazione i conti sono un po' più lunghi ma si possono comunque fare

C.E. $|x| \neq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x \neq 0$

f non è né pari né dispari

$$f(x) \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{e} e^{-\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} \geq 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \emptyset \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{e} - e^{\frac{1}{x}} \geq 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x < 0 \\ e^{-1} \geq e^{\frac{1}{x}} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{2}{x} \leq -1 \end{cases}$$

$(-2, 0)$ Intervallum con asse x

$$x \leq -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e} e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{e} e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty - 0 = +\infty \quad x = 0 \quad \text{A.V. completo}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{e} e^{\frac{1}{|x|}} - e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} - 1 \quad y = \frac{1}{e} - 1 \quad A. \text{ orizz. } a \pm \infty \quad (3)$$

$$y' = \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{|x|}} \cdot \left(-\frac{x}{x^2} \right) - e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) & x > 0 \\ \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{e} e^{-\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \right) & x < 0 \end{cases}$$

$$ID(y') = ID(y) \quad \text{A} \quad \text{ptt angolari o cuspidali}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{e} e^{-\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \neq 0$$



f str. crescente in $(-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty)$.

$$y'' = \begin{cases} \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot x^2 - 2x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \left(1 - \frac{1}{e} \right) e^{\frac{1}{x}} \frac{-1 - 2x}{x^4} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{2}{x^3} \left(\frac{1}{e} e^{-\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \right) + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{e} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \right) - e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

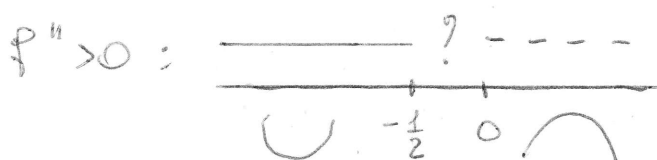
$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left(1 - \frac{1}{e} \right) e^{\frac{1}{x}} (-1 - 2x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2}{e x} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{2}{x} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{e x^2} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \vee \begin{cases} x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{2}{e x} + \frac{1}{e x^2} \right) - \left(\frac{2}{x} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e} (-2x + 1) > (2x + 1) e^{\frac{1}{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ e^{\frac{2}{x}} \{ (2x + 1) \cdot e - (-2x + 1) \} < 0 \end{cases}$$

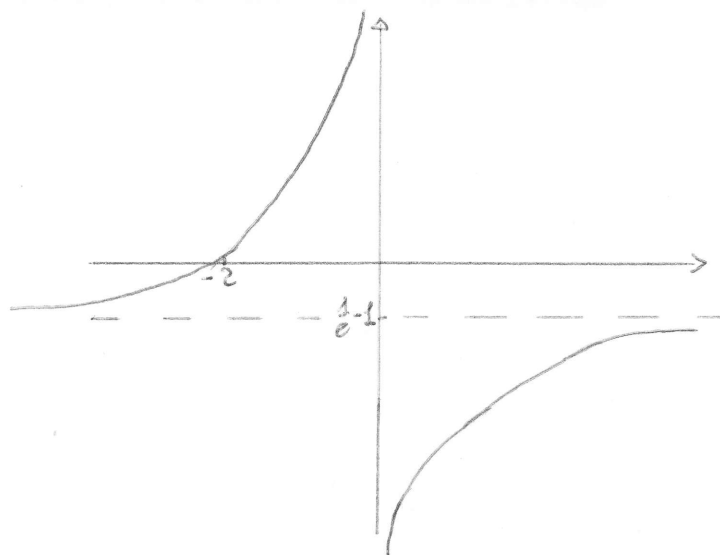
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x + 1 \leq 0 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ e^{\frac{2}{x}} < \frac{1 - 2x}{1 + 2x} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 0 \\ e^{\frac{2}{x}} < \frac{1 - 2x}{1 + 2x} \end{cases}$$

Non so studiare queste ultime disuguaglianze



f è convessa per $x < -\frac{1}{2}$
concava per $x > -\frac{1}{2}$

Perché è convessa per $x \rightarrow 0^-$,
si può supporre che lo sia in tutto $(-\infty, 0[$.



4) Posto
 $\arctg(\sin^2 x) \sim \sin^2 x - \frac{(\sin^2 x)^3}{3} \approx \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^6 \approx x^2 - \frac{1}{3}x^4$

$$\arcsin x^2 \sim x^2 + \frac{x^6}{6}$$

$$(\sqrt{1-x} + 1)^2 = ((1-x)^{1/2} - 1)^2 \approx \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right)^2 \approx \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^4$$

$$(e^{-x} - 1)^2 \approx \left(x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^2 \approx x^2 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{3}x^4$$

$$x \lg(1+x) \approx x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 - x^2 - \frac{x^6}{6}}{x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^2 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4}{-\frac{1}{16}x^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{1} = \frac{16}{3}$$

5. Posto $\sqrt{x-x^2} = t \Rightarrow \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} dx = dt$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{in genere si dubita fatta} \\ \text{la sostituzione } \sqrt{\frac{1-x}{x}} = t \\ \text{ma in questo caso conviene} \\ \sqrt{x-x^2} = t \end{array} \right.$

$$I = \int \frac{-2 dt}{1+t^2} = -2 \arctg t + c = -2 \arctg \sqrt{x-x^2} + c$$

Posto h è cont. su $\begin{cases} x-x^2 > 0 \\ x^2-x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$ non ha senso calcolare l'arctg in $[2, +\infty)$ infatti

è indef. in $[0, \frac{1}{2}]$ e in $[\frac{1}{2}, 1]$ essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$ con

ovvero $\frac{1}{2} < 1$.