

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

15 giugno 2017

1. Dopo aver studiato la seguente equazione

$$|z| z^4 - 2z^4 + 6|z|i - 12i + \frac{4 + \sqrt{3} + (4\sqrt{3} - 1)i}{i - 4} + 1 + i\sqrt{3} = 0,$$

disegnare le soluzioni nel campo complesso.

2. Studiare il dominio della funzione

$$y = \lg_{0.4} \left(1 - \frac{1}{\lg(x-1)} \right).$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{2\lg(x+1) - \lg|x^2 - 3x + 2|}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin^2 x) + \arcsin x^2 + e^{-\frac{1}{x^2}}}{(\sqrt{1-x}-1)^2 + e^{x^3} - 1 + x \lg(1+x)}.$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\sqrt{x-1} + 2}{(\sqrt[3]{x-1} + 4)\sqrt[6]{(x-1)^5}},$$

i) calcolare l'insieme delle primitive,

ii) dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$, in $]1, 2[$ e in $[3, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché
$$\frac{4+\sqrt{3}+(4\sqrt{3}-1)i}{i-4} = \frac{(4+\sqrt{3}+(4\sqrt{3}-1)i)(i+4)}{i^2-16} =$$
$$= \frac{(4+\sqrt{3})i - (4\sqrt{3}-1) + 16 + 4\sqrt{3} + (16\sqrt{3}-4)i}{-17} =$$
$$= \frac{(4+\sqrt{3}+16\sqrt{3}-4)i - 4\sqrt{3} + 1 + 16 + 4\sqrt{3}}{-17} = \frac{17 + 17\sqrt{3}i}{-17} = -1 - \sqrt{3}i$$

l'equazione diventa

$$|z| z^4 - 2z^4 + 6|z|i - 12i - 1 - \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 0 \Leftrightarrow$$

$$|z|(z^4 - 6i) - 2(z^4 - 6i) = 0 \Leftrightarrow (|z| - 2)(z^4 - 6i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$|z| = 2 \vee z = \sqrt[4]{6i} = \sqrt[4]{6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)} = \left\{ \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \right) \right. \\ \left. k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$$

L'equazione ha ∞ soluzioni date dai numeri complessi di modulo 2 e dai 4 numeri complessi

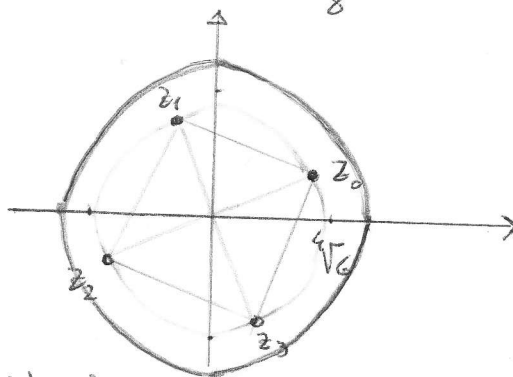
$$z_0 = \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right) = -z_0$$

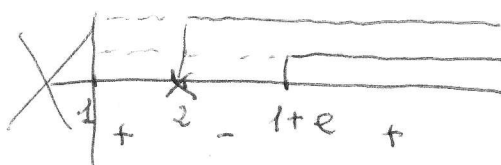
$$z_3 = \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right)$$

Oss. Le radici z_0, z_1, z_2 e z_3 sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[4]{6}$.



2. $1 - \frac{1}{\lg(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x-1) - 1}{\lg(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \lg(x-1) \neq 0 \\ \lg(x-1) - 1 > 0 \\ \lg(x-1) > 0 \end{cases}$ regole segno!

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \neq 1 \\ \lg(x-1) > 1 \\ x-1 > 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x > 1 \\ x \neq 2 \\ x-1 > e \\ x > 2 \end{matrix}$$

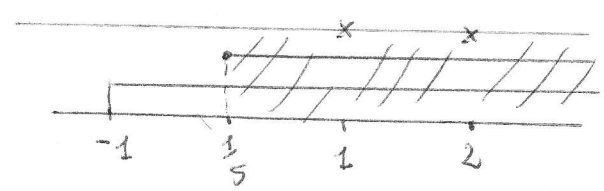


$$ID =]1, 2[\cup]1+e, +\infty[$$

$$3. \quad 2 \lg(x+1) - \lg|x^2 - 3x + 2| \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ |x^2 - 3x + 2| > 0 \\ \lg(x+1)^2 \geq \lg|x^2 - 3x + 2| \end{cases} \quad x_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 1, 2 \\ (x+1)^2 \geq |x^2 - 3x + 2| \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 1, 2 \\ -(x^2 + 2x + 1) \leq x^2 - 3x + 2 \leq x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 1, 2 \\ x^2 - 3x + 2 \geq -x^2 - 2x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \leq x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 1, 2 \\ 2x^2 - x + 3 \geq 0 \\ 5x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 1, 2 \\ \Delta < 0 \quad \forall x \\ x \geq \frac{1}{5} \end{cases}$$



$$D = [\frac{1}{5}, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty)$$

$$f(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2 \lg(x+1) - \lg|x^2 - 3x + 2| > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in]\frac{1}{5}, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2 \lg(x+1) - \lg|x^2 - 3x + 2| = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{1}{5}$$

f non è né pari né dispari perché DA non è simmetrica rispetto a 0.

$$f(\frac{1}{5}) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{2 \lg 2 - \lim_{y \rightarrow 0} \lg|y|} = +\infty \quad x=1 \quad \text{As. Vert.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{2 \lg 3 - \lim_{y \rightarrow 0} \lg|y|} = +\infty \quad x=2 \quad \text{comples.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\lg \frac{(x+1)^2}{|x^2 - 3x + 2|}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\lg \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}} = \sqrt{\lg 1} = 0 \quad y \neq 0 \quad \text{As. orizz. a } +\infty$$

$$y' = \frac{1}{2 \sqrt{2 \lg(x+1) - \lg|x^2 - 3x + 2|}} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 2} \right) \quad \forall x \in D - \{\frac{1}{5}\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^+} y' = \frac{1}{0^+} \left(\frac{2}{\frac{6}{5}} - \frac{\frac{3}{5} - 3}{(\frac{1}{5})^2 - \frac{3}{5} + 2} \right) = +\infty \quad x = \frac{1}{5} \quad \text{punto di semicuspide}$$

+-----+-----+

il grafico parte dal punto $(\frac{1}{5}, 0)$ con tangente verticale

$$y' > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2 - 2x + 3x + 3}{(x+1)(x^2 - 3x + 2)} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad (7-5x)(x+1)(x^2 - 3x + 2) > 0$$

Applica la regola del segno in D

$$7-5x > 0$$

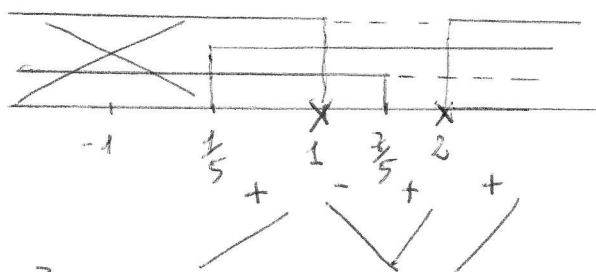
$$x < \frac{7}{5}$$

$$x+1 > 0$$

$$x > -1$$

$$x^2-3x+2 > 0$$

$$x < 1 \vee x > 2$$



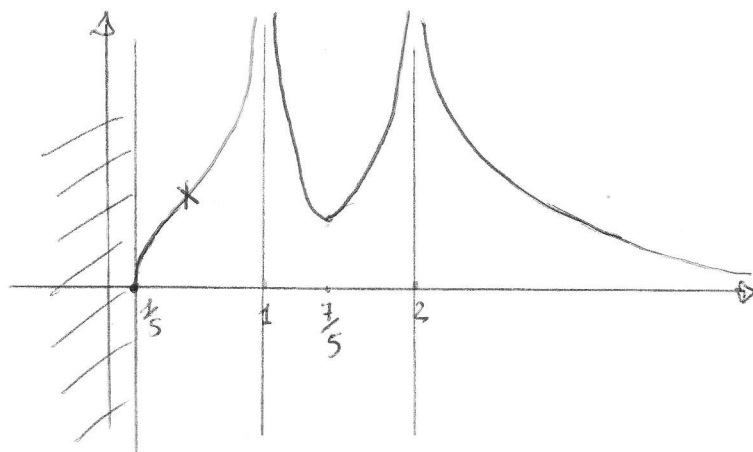
f sta crescente in $[\frac{1}{5}, 1[$, in $[\frac{7}{5}, 2[$ e in $]2, +\infty)$

f sta decres. in $]1, \frac{7}{5}[$

$$\text{in } \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = f(\frac{7}{5}) \end{cases}$$

minimo relativo

Senza studiare la derivata seconda, si vede che c'è un pto di flesso d'ascissa complessa tra $\frac{1}{5}$ e 1.



4. Poiché per $x \rightarrow 0$:

$$\arcsin(\sin^2 x) \sim \sin^2 x \sim x^2$$

$$\arcsin x^2 \sim x^2$$

$$e^{-\frac{1}{4}x^2} \rightarrow 0 \text{ con ord. comunque grande}$$

$$(\sqrt{1-x}-1)^2 \approx \left((1-x)^{\frac{1}{2}}-1\right)^2 \sim \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$$

$$e^{x^3}-1 \sim x^3$$

$$x \lg(1+x) \sim x^2$$

Il limite di Senka (trascurando gli infinitesimi più lenti)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2}{\frac{1}{4}x^2 + x^2} = \frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5}$$

5. Posto $\sqrt[6]{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^6 \quad x = t^6 + 1 \quad dx = 6t^5 dt$

$$\begin{aligned} \int h(x) dx &= \int \frac{t^3+2}{(t^2+4)t^5} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^3+2}{t^2+4} dt \\ &= \int \left(t + \frac{4t+2}{t^2+4} \right) dt = \frac{t^2}{2} + 2 \int \frac{2t}{t^2+4} dt + 2 \int \frac{1}{t^2+4} dt \\ &= \frac{t^2}{2} + 2 \ln|t^2+4| + 2 \int \frac{1}{t^2+4} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2 \lg(t^2+4) + \arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x-1} + 2 \lg(\sqrt[3]{x-1}+4) + \arctg \frac{\sqrt[6]{x-1}}{2} + C.$$

ii) Poiché h è definita per

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{x-1} \neq -4 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \neq -64 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]1, +\infty)$$

h non è definita in $]0,1]$ e quindi non ha senso calcolarne l'integrale in senso improprio. Essendo h continua in $]1,2]$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}+2}{(\sqrt[3]{x-1}+4)(\sqrt[6]{x-1})^5} = \frac{3}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^{5/6}} = +\infty \text{ con ord } \frac{5}{6} < 1$$

Con $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = h(2) \in \mathbb{R}$, segue che h è integrabile in d.i. in $]1,2]$.

Infine poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}+2}{(\sqrt[3]{x-1}+4)(\sqrt[6]{x-1})^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/2}}{x^{1/3} \cdot x^{5/6}} = 0 \text{ con ordine } \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow h$ non è integrabile in d.i. in $[3, +\infty)$.